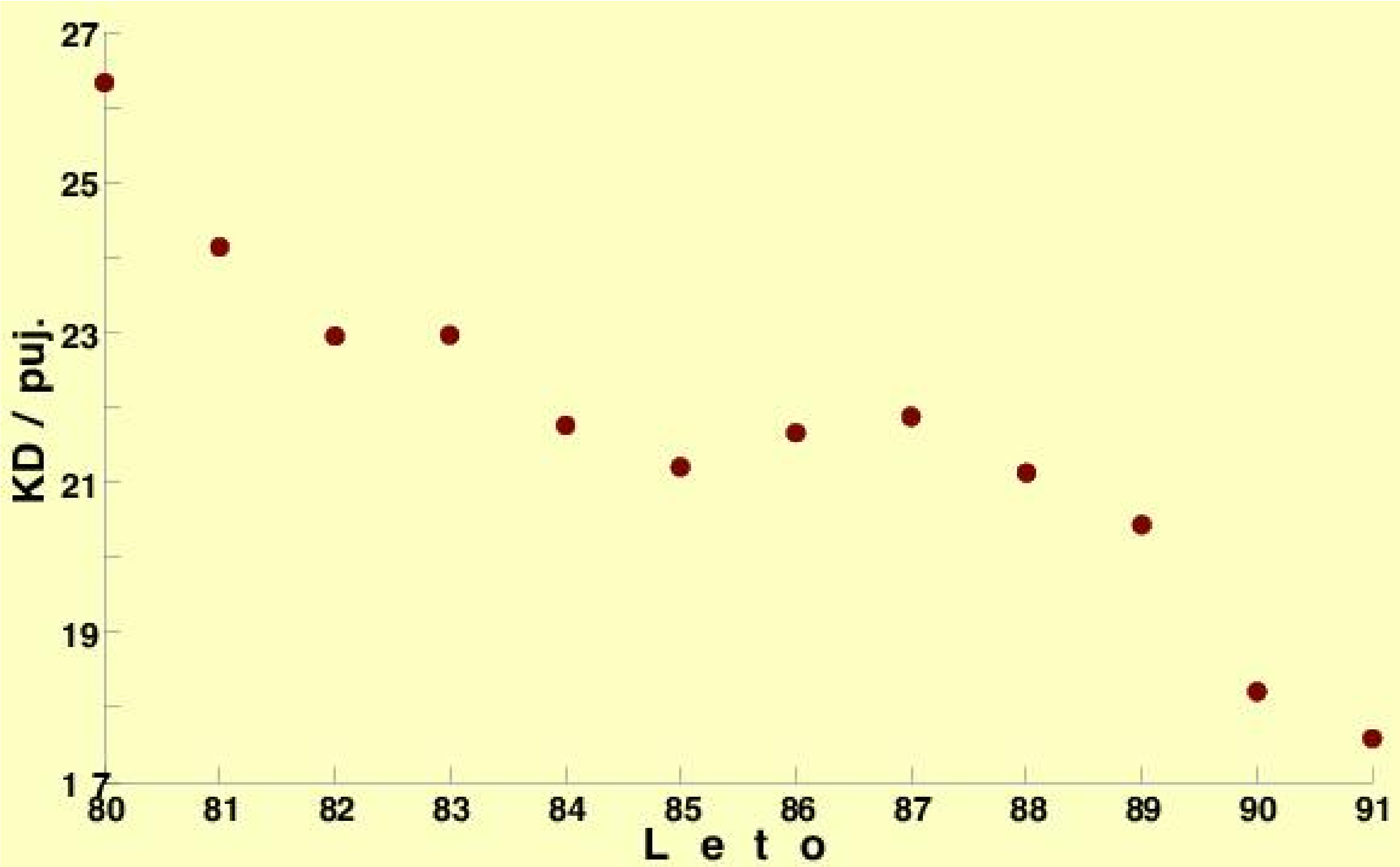
Metoda najmanjših kvadratov

Milena Kovač

11. januar 2013

Primer: krmni dnevi na živorojenega pujska



Določimo model!

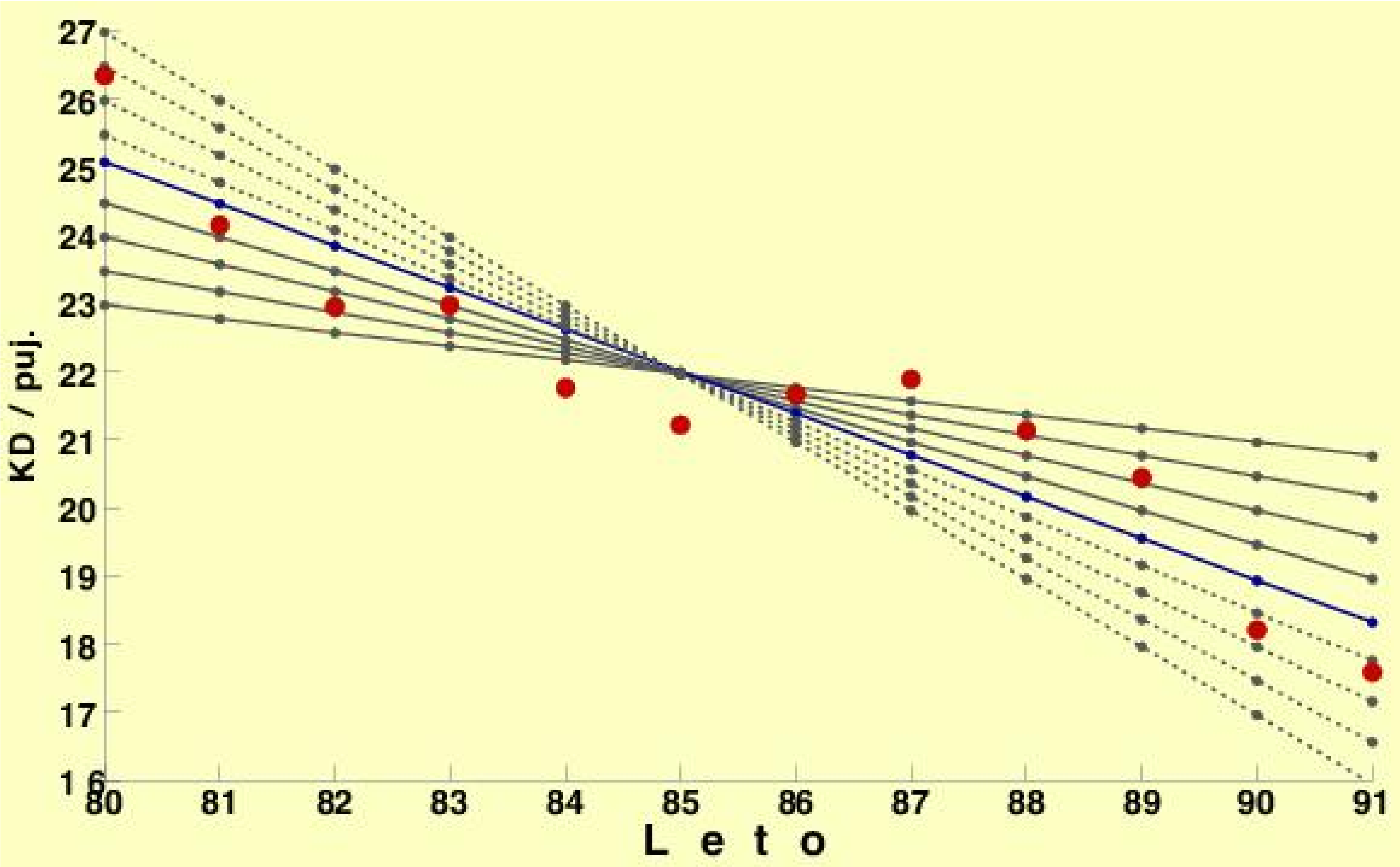
Vplivi: leto kot neodvisna spremenljivka

Model: poenostavimo in uporabimo samo linearno regresijo

$$y_i = \mu + bx_i + e_i$$

Poiščimo najprimernejšo premico!

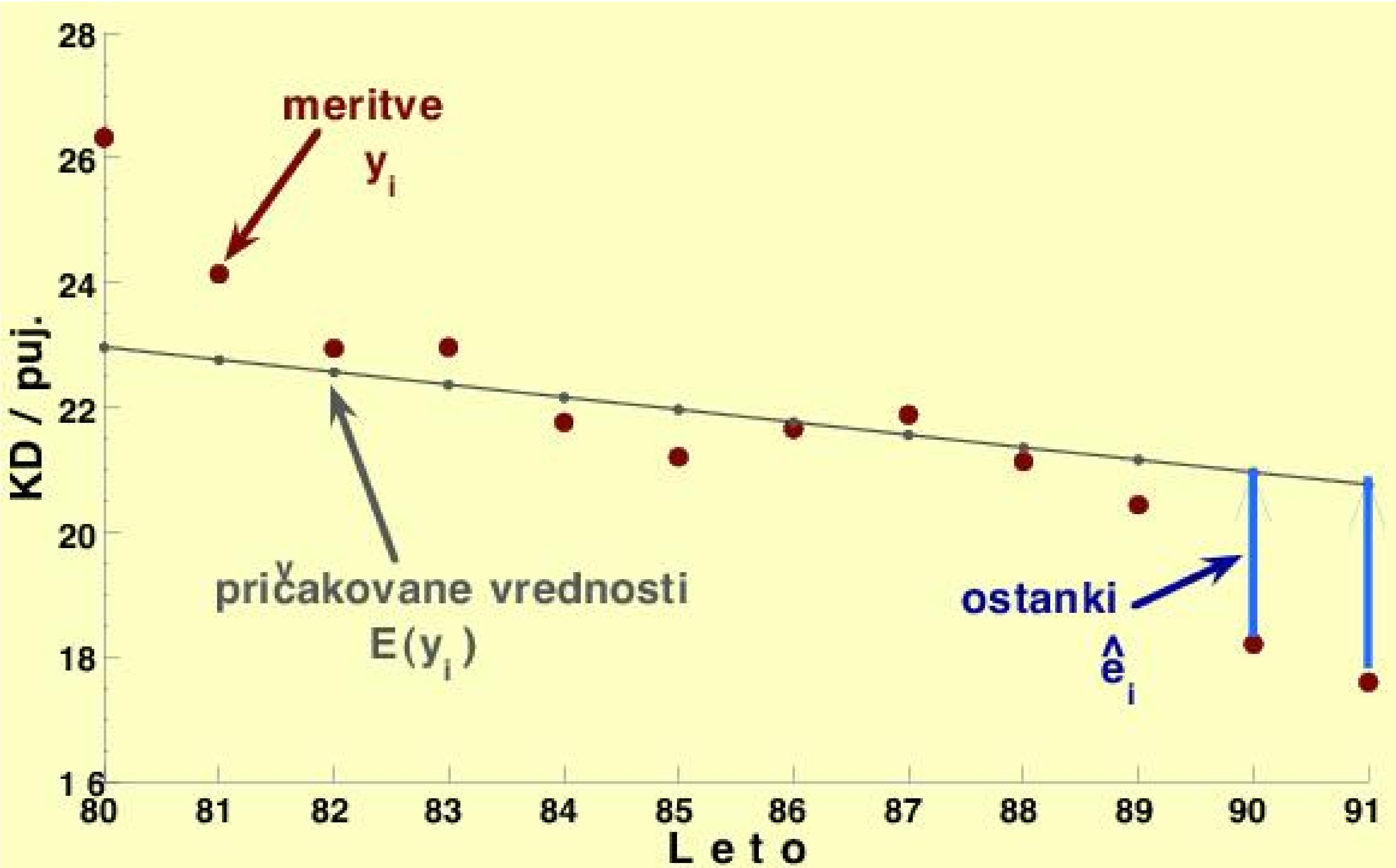
Katera premica se najbolje prilega?



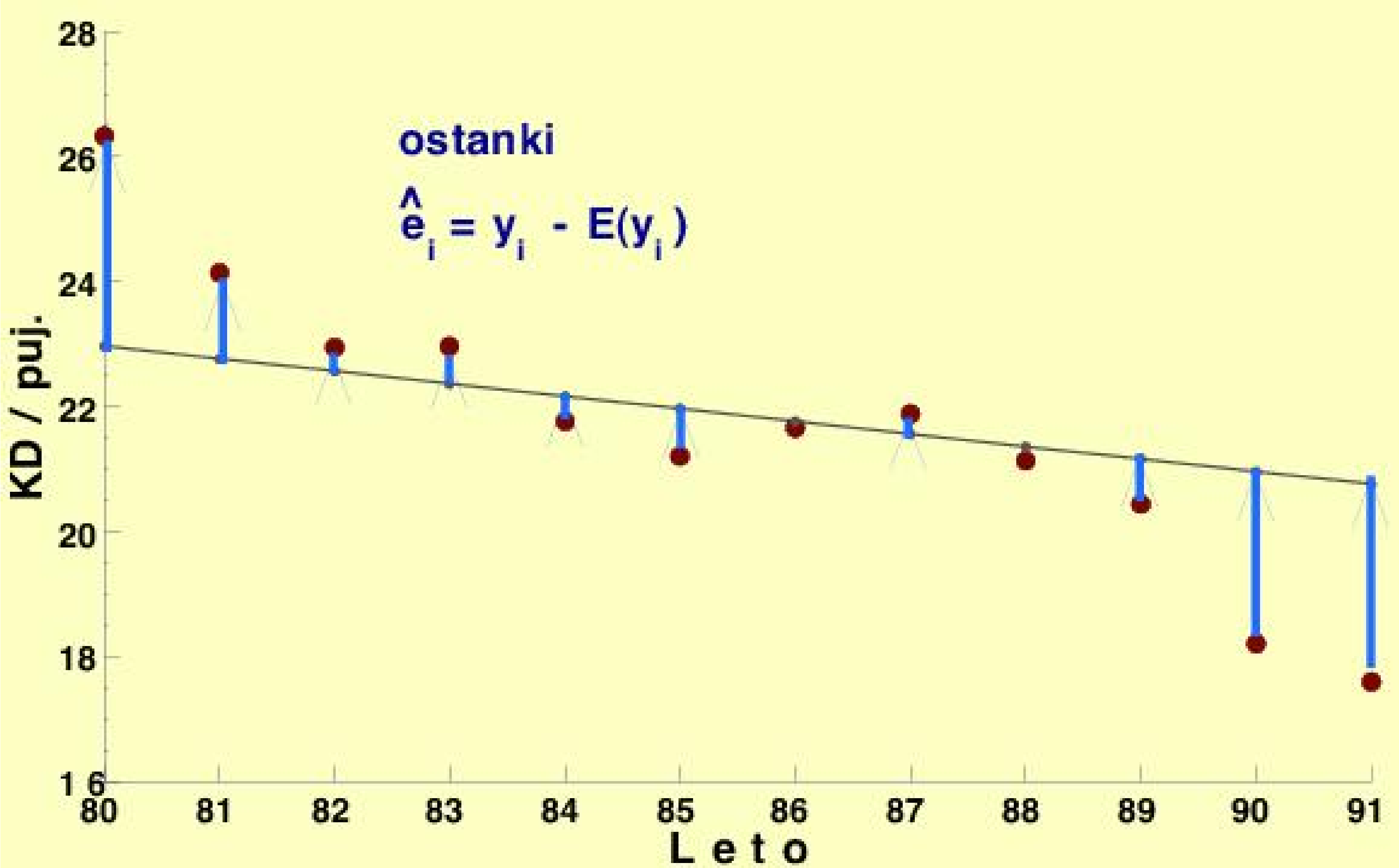
Katera med 9 premicami je najprimernejša? MODRA

Kako ste jo izbrali?

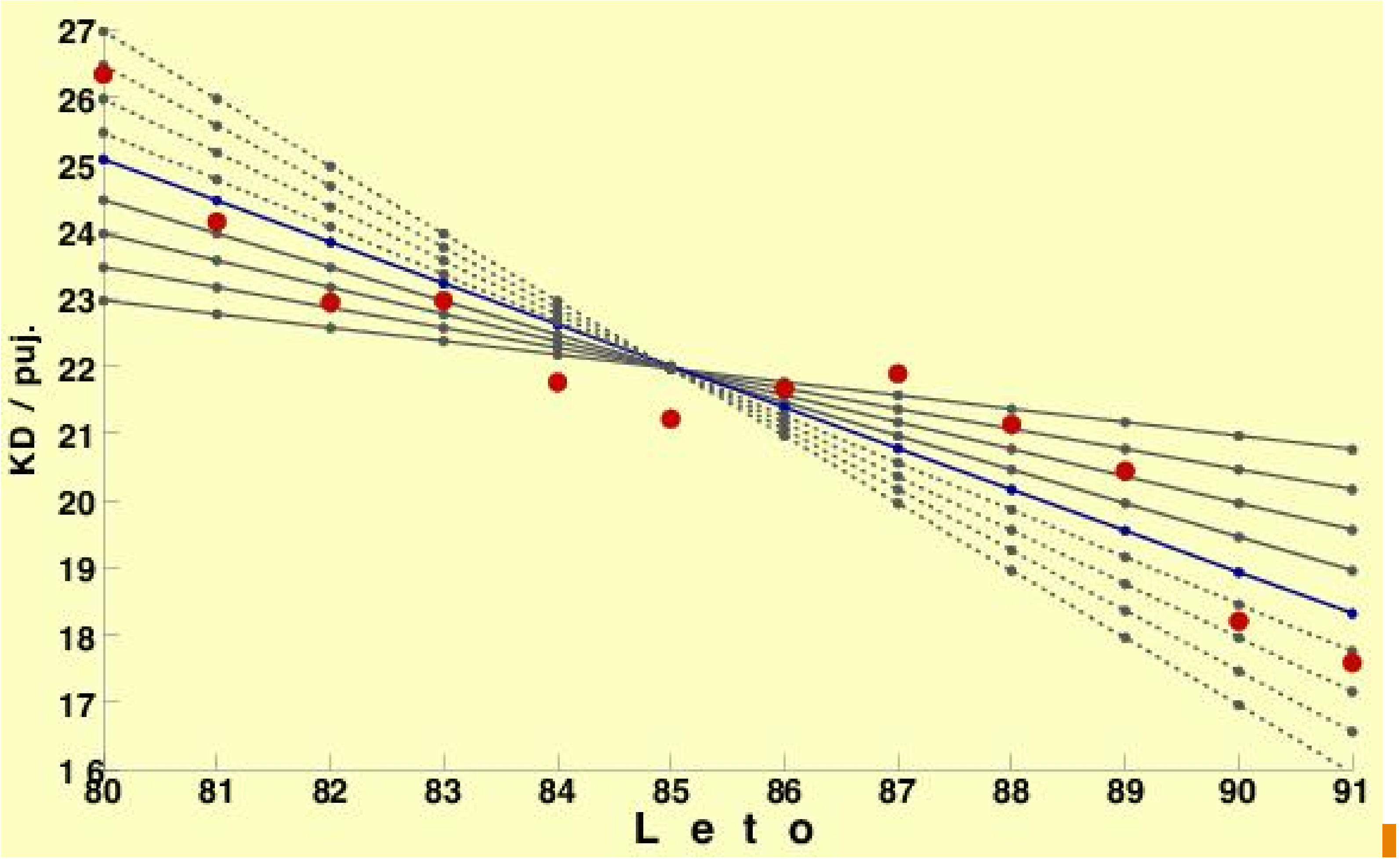
Kriterij za izbor: ostanek



Kaj narediti z ostankom?

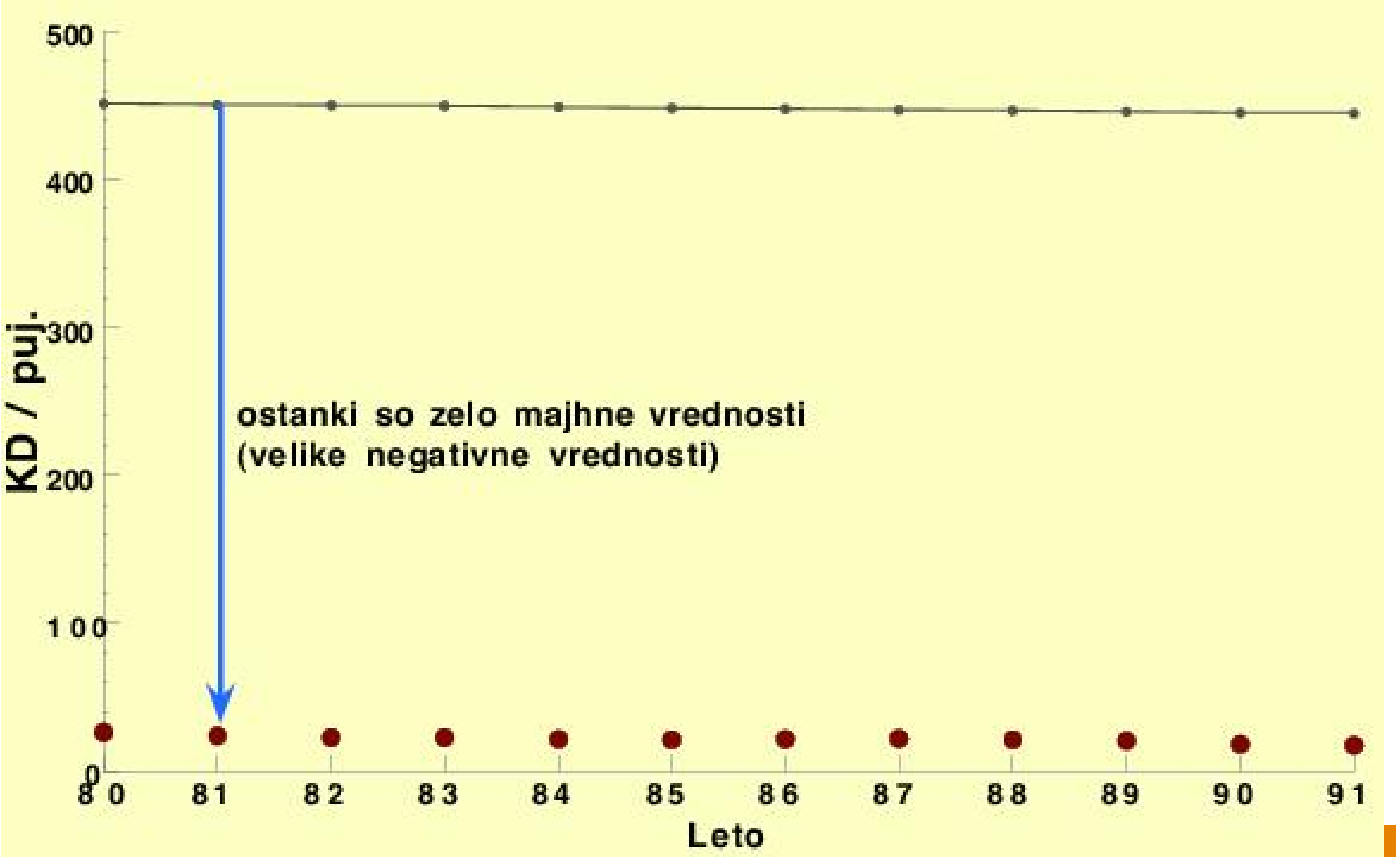


Vsota ostankov = 0?



Pri vseh premicah je vsota ostankov nič, takih premic je neskončno mnogo (celo s pozitivnim regresijskim koeficientom)!

Minimalna vsota ostankov?



Ko odmikamo premico proti $+\infty$, so ostanki vse bolj negativni in vsota se manjša!

Izbrane enačbe

Oznaka	Nekatere izbrane enačbe
1	$y_i = 39.033 - 0.20084 x_i + e_i$
2	$y_i = 47.533 - 0.30084 x_i + e_i$
3	$y_i = 56.033 - 0.40084 x_i + e_i$
4	$y_i = 64.533 - 0.50084 x_i + e_i$
5	$y_i = 74.146 - 0.6135 x_i + e_i$
6	$y_i = 81.533 - 0.70084 x_i + e_i$
7	$y_i = 90.033 - 0.80084 x_i + e_i$
8	$y_i = 98.533 - 0.90084 x_i + e_i$
9	$y_i = 107.033 - 1.00084 x_i + e_i$

Vsota kvadratov za ostanek

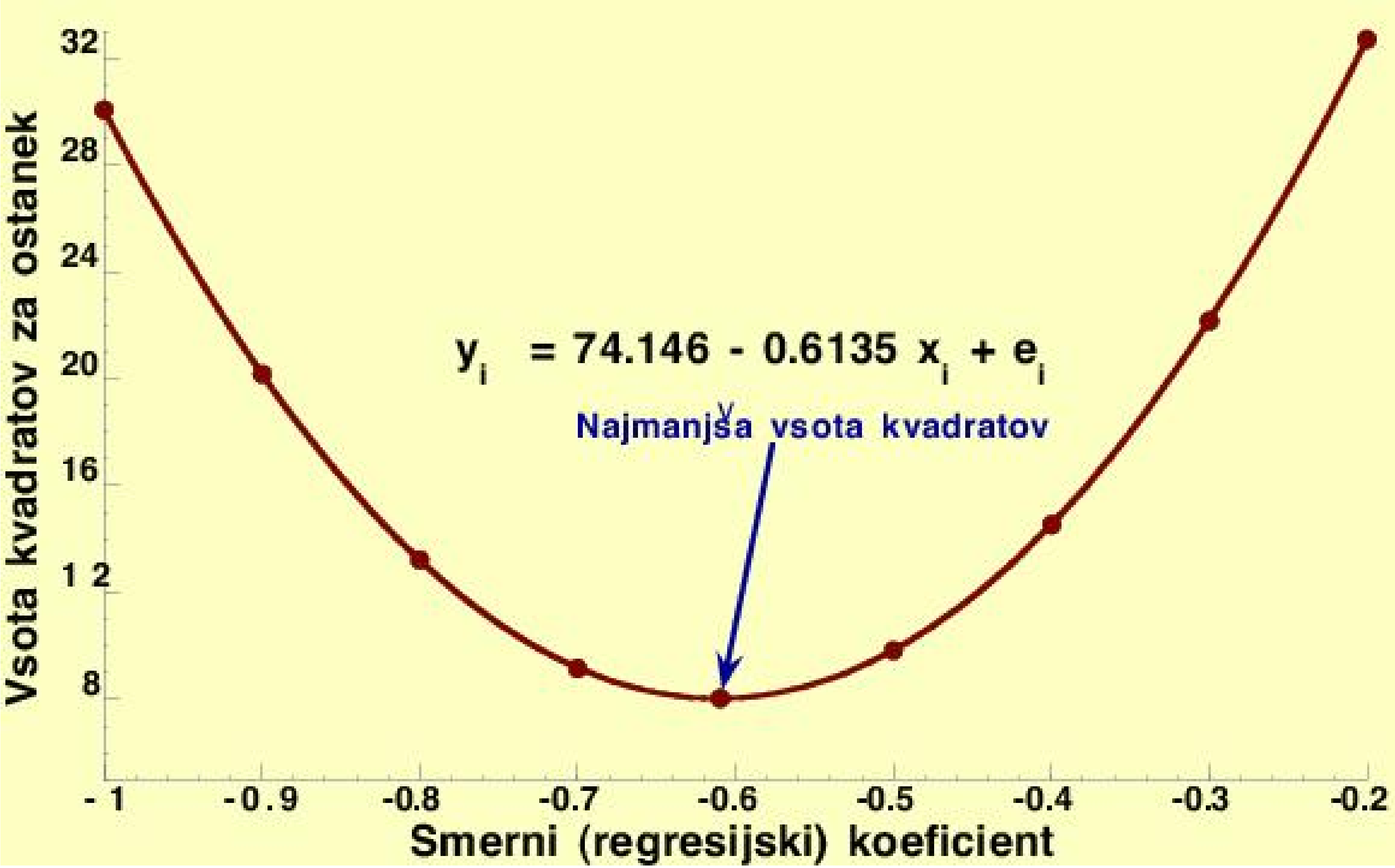
Za vsako od 9 premic izračunamo:

- ostanke za vsak podatek: $\widehat{e}_i = y_i - E(y_i)$
- jih kvadriramo $\widehat{e}_i^2$
- seštejemo $\sum \widehat{e}_i^2$
- narišemo na graf ...

Primer

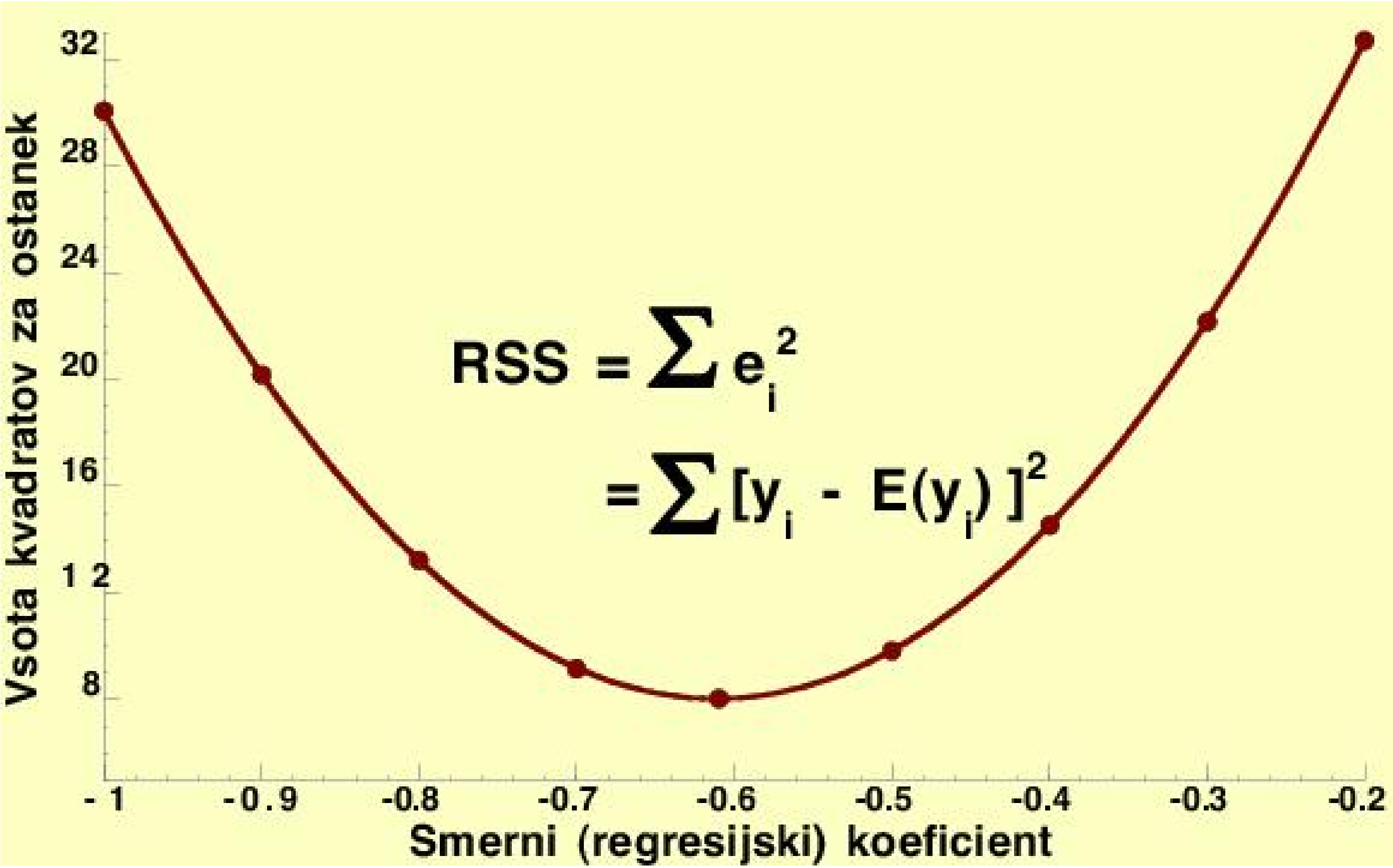
Leto	KD na pujska	$E(y_i)$	$\widehat{e}_i = y_i - E(y_i)$	$\widehat{e}_i \cdot \widehat{e}_i$
80	26.33			
81	24.14			
82	22.95			
83	22.97			
84	21.76			
85	21.21			
86	21.66			
87	21.88			
88	21.13			
89	20.44			
90	18.21			
91	17.59			

Vsota kvadratov za ostanek



Numerična rešitev: iščemo minimum vsote kvadriranih ostankov

Funkcija: vsota kvadratov za ostanek



Kako najdemo minimum?

Kako poiščemo minimum funkcije?

- Napišimo funkcijo: $RSS = \sum \left(y_i - E\left(y_i\right)\right)^2$

- Poiščemo prve parcialne odvode po vseh neznanih parametrih in jih izenačimo z 0

- Z drugimi parcialnimi odvodi preverimo, če smo res našli minimum

Model

Za izpeljavo bomo modelu dodali še sistematski vpliv $\boldsymbol{A}$ s tremi nivoji:

$$y_{ij} = \mu + A_i + bx_{ij} + e_{ij}$$

Pričakovana vrednost

$$E(y_{ij}) = E(\mu + A_i + bx_{ij} + e_{ij})$$

$$E(y_{ij}) = \mu + A_i + bx_{ij}$$

Varianca

$$var(y_{ij}) = var(\mu + A_i + bx_{ij} + e_{ij})$$

$$var(y_{ij}) = var(e_{ij}) = \sigma_e^2$$

Določimo vsoto kvadratov za ostanek!

$$RSS = \sum \left(y_{ij} - E\left(y_{ij}\right)\right)^2 =$$

Nadomestimo pričakovano vrednost:

$$= \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2 =$$

Poiskati moramo minimum:

$$= \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2 = min.$$

Neznani parametri so: μ, A_1, A_2, A_3, b

Parcialni odvod po prvi neznanki!

Prva neznanka je μ:

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial \mu} =$$

Preuredimo in razširimo!

$$= \sum \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)}{\partial \mu} =$$

Izvrednotimo!

$$= 2 \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)(-1)$$

Pomnožimo z -1 , izenačimo z 0 in delimo z 2!

$$\sum(-y_{ij}+\mu+A_i+bx_{ij})=0$$

Neznanke postanejo ocene!

$$\sum\left(-y_{ij}+\widehat{\mu}+\widehat{A}_i+\widehat{b}x_{ij}\right)=0$$

Preuredimo!

$$\sum\widehat{\mu}+\sum\widehat{A}_i+\sum\widehat{b}x_{ij}=\sum y_{ij}$$

Razmislimo o prvem členu!

$$\sum\widehat{\mu}=\widehat{\mu}+\widehat{\mu}+\cdots+\widehat{\mu}=n\widehat{\mu}$$

Poenostavimo drugi člen!

$$\sum\widehat{A}_i=$$
$$\widehat{A}_1+\cdots+\widehat{A}_1+\widehat{A}_2+\cdots+\widehat{A}_2+\widehat{A}_3+\cdots+\widehat{A}_3$$

$$\sum \widehat{A}_i = n_1\widehat{A}_1 + n_2\widehat{A}_2 + n_3\widehat{A}_3$$

Sedaj pa poglejmo še člen z regresijo!

$$\sum \widehat{b}x_{ij} = \left(\sum x_{ij}\right)\widehat{b}$$

Zamenjajmo člene v enačbi!

$$\sum \widehat{\mu} + \sum \widehat{A}_i + \sum \widehat{b}x_{ij} = \sum y_{ij}$$

$$n\widehat{\mu} + n_1\widehat{A}_1 + n_2\widehat{A}_2 + n_3\widehat{A}_3 + \left(\sum x_{ij}\right)\widehat{b} = \sum y_{ij}$$

To smo dobili iz prvega parcialnega odvoda!

Parcialni odvod po drugi neznanki!

Druga neznanka je A_1:

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial A_1} =$$

Preuredimo in razširimo!

$$= \sum \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)}{\partial A_1} =$$

Izvrednotimo!

$$= 2 \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right) \begin{cases} 0 & ; i \neq 1 \\ (-1) & ; i = 1 \end{cases}$$

Obravnavajmo samo drugo enačbo. Delimo z 2, pomnožimo z -1 in izenačimo z 0!

$$\sum(-y_{1j}+\mu+A_1+bx_{1j})=0$$

Neznanke postanejo ocene!

$$\sum\left(-y_{1j}+\widehat{\mu}+\widehat{A}_1+\widehat{b}x_{1j}\right)=0$$

Preuredimo!

$$\sum\widehat{\mu}+\sum\widehat{A}_1+\sum\widehat{b}x_{1j}=\sum y_{1j}$$

Razmislimo o prvem členu!

$$\sum\widehat{\mu}=\widehat{\mu}+\widehat{\mu}+\cdots+\widehat{\mu}=n_1\widehat{\mu}$$

Poenostavimo drugi člen!

$$\sum\widehat{A}_1=n_1\widehat{A}_1$$

Sedaj pa poglejmo še člen z regresijo!

$$\sum \widehat{b} x_{1j} = \left(\sum x_{1j}\right) \widehat{b}$$

Zamenjajmo člene v enačbi!

$$\sum \widehat{\mu} + \sum \widehat{A}_1 + \sum \widehat{b} x_{1j} = \sum y_{1j}$$

$$n_1 \widehat{\mu} + n_1 \widehat{A}_1 + 0 \widehat{A}_2 + 0 \widehat{A}_3 + \left(\sum x_{1j}\right) \widehat{b} = \sum y_{1j}$$

To smo dobili iz prvega parcialnega odvoda po neznanki A_1!

Parcialni odvod po tretji neznanki!

Tretja neznanka je A_2:

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial A_2} =$$

Preuredimo in razširimo!

$$= \sum \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)}{\partial A_2} =$$

Izvrednotimo!

$$= 2 \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right) \begin{cases} 0 & ; i \neq 2 \\ (-1) & ; i = 2 \end{cases}$$

Obravnavajmo samo drugo enačbo. Pomnožimo z -1 , izenačimo z

0 in delimo z 2!

$$\sum(-y_{2j}+\mu+A_2+bx_{2j})=0$$

Neznanke postanejo ocene!

$$\sum\left(-y_{2j}+\widehat{\mu}+\widehat{A}_2+\widehat{b}x_{2j}\right)=0$$

Preuredimo!

$$\sum\widehat{\mu}+\sum\widehat{A}_2+\sum\widehat{b}x_{2j}=\sum y_{2j}$$

$$n_2\widehat{\mu}+0\widehat{A}_1+n_2\widehat{A}_2+0\widehat{A}_3+(\sum x_{2j})\widehat{b}=\sum y_{2j}$$

To smo dobili iz prvega parcialnega odvoda po neznanki A_2!

Parcialni odvod po četrti neznanki!

Četrta neznanka je A_3, a izpeljimo enačbo z oznako $A_{i'}$:

$$\frac{\partial \sum\left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial A_{i'}} =$$

Preuredimo in razširimo!

$$= \sum \frac{\partial\left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial\left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial\left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)}{\partial A_{i'}} =$$

Izvrednotimo!

$$= 2\sum\left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)\begin{cases} 0 & ; i \neq i' \\ (-1) & ; i = i' \end{cases}$$

Obravnavajmo samo drugo enačbo. Pomnožimo z -1, izenačimo z

0 in delimo z 2!

$$\sum(-y_{ij} + \mu + A_i + bx_{ij}) = 0$$

Neznanke postanejo ocene!

$$\sum\left(-y_{ij} + \widehat{\mu} + \widehat{A}_i + \widehat{b}x_{ij}\right) = 0$$

Preuredimo!

$$\sum\widehat{\mu} + \sum\widehat{A}_i + \sum\widehat{b}x_{ij} = \sum y_{ij}$$

$$n_i\widehat{\mu} + n_i\widehat{A}_i + (\sum x_{ij})\widehat{b} = \sum y_{ij}$$

Preverimo!

$$n_i\widehat{\mu} + n_i\widehat{A}_i + \left(\sum x_{ij}\right)\widehat{b} = \sum y_{ij}$$

- To smo dobili iz parcialnega odvoda po enem od neznanih parametrov pri vplivu A!

- Z $i = 1$ ali $i = 2$ razvijemo že izpeljani enačbi

- Z $i = 3$ razvijemo še zadnjo manjkajočo enačbo za parameter A_3

- Pri vplivih z nivojih lahko odvajamo po $A_{i'}$ in potem enačbe samo razvijemo!

Parcialni odvod po peti neznanki!

Peta neznanka je b:

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial b} =$$

Preuredimo in razširimo!

$$= \sum \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)^2}{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)}{\partial b} =$$

Izvrednotimo!

$$= 2 \sum \left(y_{ij} - \mu - A_i - bx_{ij}\right)\left(-x_{ij}\right)$$

Obravnavajmo samo drugo enačbo. Pomnožimo z $-x_{ij}$, izenačimo z 0 in delimo z 2!

$$\sum \left(-y_{ij}x_{ij} + \mu x_{ij} + A_i x_{ij} + b x_{ij}^2\right) = 0$$

Neznanke postanejo ocene!

$$\sum \left(-y_{ij}x_{ij} + \widehat{\mu} x_{ij} + \widehat{A}_i x_{ij} + \widehat{b} x_{ij}^2\right) = 0$$

Preuredimo!

$$\sum \widehat{\mu} x_{ij} + \sum \widehat{A}_i x_{ij} + \sum \widehat{b} x_{ij}^2 = \sum y_{ij} x_{ij}$$

Uredimo še zadnjo enačbo!

$$\widehat{\mu} \Sigma x_{ij} + \widehat{A}_1 \Sigma x_{1j} + \widehat{A}_2 \Sigma x_{2j} + \\ + \widehat{A}_3 \Sigma x_{3j} + \widehat{b} \Sigma x_{ij}^2 = \Sigma y_{ij} x_{ij}$$

Zberimo enačbe!

$$n\widehat{\mu} + n_1\widehat{A}_1 + n_2\widehat{A}_2 + n_3\widehat{A}_3 + \left(\sum x_{ij}\right)\widehat{b} = \sum y_{ij}$$

$$n_1\widehat{\mu} + n_1\widehat{A}_1 + 0\widehat{A}_2 + 0\widehat{A}_3 + \left(\sum x_{1j}\right)\widehat{b} = \sum y_{1j}$$

$$n_2\widehat{\mu} + 0\widehat{A}_1 + n_2\widehat{A}_2 + 0\widehat{A}_3 + \left(\sum x_{2j}\right)\widehat{b} = \sum y_{2j}$$

$$n_3\widehat{\mu} + 0\widehat{A}_1 + 0\widehat{A}_2 + n_3\widehat{A}_3 + \left(\sum x_{3j}\right)\widehat{b} = \sum y_{3j}$$

$$\widehat{\mu}\Sigma x_{ij} + \widehat{A}_1\Sigma x_{1j} + \widehat{A}_2\Sigma x_{2j} + \widehat{A}_3\Sigma x_{3j} + \widehat{b}\Sigma x_{ij}^2 = \Sigma y_{ij}x_{ij}$$

Nastavimo sistem enačb!

$$\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & n_3 & \Sigma x_{ij} \\ n_1 & n_1 & & & \Sigma x_{1j} \\ n_2 & & n_2 & & \Sigma x_{2j} \\ n_3 & & & n_3 & \Sigma x_{3j} \\ \Sigma x_{ij} & \Sigma x_{1j} & \Sigma x_{2j} & \Sigma x_{3j} & \Sigma x_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{A}_1 \\ \widehat{A}_2 \\ \widehat{A}_3 \\ \widehat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_{ij} \\ \Sigma y_{1j} \\ \Sigma y_{2j} \\ \Sigma y_{3j} \\ \Sigma x_{ij} y_{ij} \end{bmatrix}$$

NUJNO!

Primer - ovce I

			Odstavitev					Masa ob
Pasma	i	Jagnje	Starost (dni)			Masa (kg)		prodaji (kg)
Texel	1	1	90	-1	1	38.7	-38.7	40.2
Texel	1	2	85	-6	36	35.3	-211.8	37.0
Texel	1	3	95	+4	16	32.1	128.4	36.7
JS ovca	2	4	88	-3	9	26.2	-78.6	32.5
JS ovca	2	5	91	0	0.	27.3	0.0	28.9
JS ovca	2	6	97	+6	36	33.4	200.4	35.6
↑	↑		↑	↑	↑	↑		
P_i	i	ni	x_{ij}	z_{ij}	z^2_{ij}	y_{ij}		ni

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(z_{ij}) + e_{ij}$

- pri metodi najmanjših kvadratov ni naključnih vplivov

Nastavimo sistem enačb

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(x_{ij} - 91) + e_{ij}$

Upoštevajmo: $z_{ij} = x_{ij} - 91$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \mu} = \frac{\partial \sum\left(y_{ij} - E\left(y_{ij}\right)\right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum\left(y_{ij} - \mu - P_i - b_i z_{ij}\right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum\left(y_{ij} - \mu - P_i - b_i z_{ij}\right)^2}{\partial P_{i'}} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_i z_{ij} \right)^2}{\partial b_{i'}} =$$

- dokončajte delo

Simbolična nastavitev - direktno

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(z_{ij}) + e_{ij}$

μ	P_1	P_2	b_1	b_2	desna stran

μ	n	n_1	n_2	Σz_{1j}	Σz_{2j}	$\sum y_{ij}$
P_1	n_1	n_1	0	Σz_{1j}	0	$\sum y_{1j}$
P_2	n_2	0	n_2	0	Σz_{2j}	$\sum y_{2j}$
b_1	Σz_{1j}	Σz_{1j}	0	Σz_{1j}^2	0	$\sum z_{1j} y_{1j}$
b_2	Σz_{2j}	0	Σz_{2j}	0	Σz_{2j}^2	$\sum z_{2j} y_{2j}$

- zamenjajmo simbole z vrednostmi!

Dodajmo uporabne stolpce v tabelo s podatki

Pasma	i	Jagnje	Odstavitev Starost (dni)			Masa (kg)		Masa ob prodaji (kg)
Texel	1	1	90	-1	1	38.7	-38.7	40.2
Texel	1	2	85	-6	36	35.3	-211.8	37.0
Texel	1	3	95	+4	16	32.1	128.4	36.7
JS ovca	2	4	88	-3	9	26.2	-78.6	32.5
JS ovca	2	5	91	0	0.	27.3	0.0	28.9
JS ovca	2	6	97	+6	36	33.4	200.4	35.6
$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
P_i	i	ni	x_{ij}	z_{ij}	z_{ij}^2	y_{ij}	$z_{ij}y_{ij}$	ni

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(z_{ij}) + e_{ij}$

Nastavljanje sistema enačb

- direktno
  - enostavno pri vplivih z razredi
  - preverimo enačbe pri kvantitativnih vplivih
- ali podatke (y_{ij}) uredimo v matriko (tabelo) dogodkov $\mathbf{X}$
  - pri vplivih z razredi vpišemo
    - ⋆ 1, kadar podatek uporabimo za izračun parametra, in
    - ⋆ 0, kadar ga ne uporabimo
  - pri kvantitativnih vpišemo vrednost izraza desno od regresijskega koeficienta

Preverimo nastavitev - ovce I

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(x_{ij} - 91) + e_{ij}$

	μ	P_1	P_2	b_1	b_2	desna stran
μ	6	3	3	-3	+3	193.0
P_1	3	3	0	-3	0	106.1
P_2	3	0	3	0	+3	86.9
b_1	-3	-3	0	53	0	-122.1
b_2	+3	0	+3	0	45	+121.8

Matrika (tabela) dogodkov $\mathbf{X}$

(neznani) parametri

$\mathbf{X} \rightarrow$

μ	P_1	P_2	b_1	b_2	$y_{ij} \downarrow$
1	1		-1		38.7
1	1		-6		35.3
1	1		+4		32.1
1		1		-3	26.2
1		1		0	27.3
1		1		+6	33.4

1	1	1	1	1	1	6	3	3	-3	+3	193.0
1	1	1				3	3	0	-3	0	106.1
			1	1	1	3	0	3	0	+3	86.9
-1	-6	+4				-3	-3	0	53	0	-122.1
			-3	0	+6	+3	0	+3	0	45	+121.8

Transponirajmo nastavljeno matriko (tabelo)

množimo

$\mathbf{X}'$ $\downarrow$ $\mathbf{X} \rightarrow$

1	1		-1		38.7
1	1		-6		35.3
1	1		+4		32.1
1		1		-3	26.2
1		1		0	27.3
1		1		+6	33.4

1	1	1	1	1	1
1	1	1			
			1	1	1
-1	-6	+4			
			-3	0	+6

6	3	3	-3	+3	193.0
3	3	0	-3	0	106.1
3	0	3	0	+3	86.9
-3	-3	0	53	0	-122.1
+3	0	+3	0	45	+121.8

Matrika koeficientov ...

1	1		-1	
1	1		-6	
1	1		+4	
1		1		-3
1		1		0
1		1		+6

38.7
35.3
32.1
26.2
27.3
33.4

1	1	1	1	1	1
1	1	1			
			1	1	1
-1	-6	+4			
			-3	0	+6

6	3	3	-3	+3
3	3	0	-3	0
3	0	3	0	+3
-3	-3	0	53	0
+3	0	+3	0	45

193.0
106.1
86.9
-122.1
+121.8

Kako smo vrednosti dobili

- pri vplivih z razredi s štetjem

- pri kvantitativnih vplivih seštevamo (spremenjene) neodvisne spremenljivke

$$\sum z_{1j} = -1 - 6 + 4 \ \ldots$$
$$\sum z_{1j}^2 = 1 + 36 + 16 = 53 \ \ldots$$

- na desni strani (ang. *RHS*)

$$\sum y_{1j} = 38.7 + 35.3 + 32.1 = 106.1 \ \ldots$$
$$\sum z_{1j} y_{1j} = (-1) \cdot 38.7 + (-6) \cdot 35.3 + 4 \cdot 32.1 = -122.1 \ \ldots$$

… in desna stran enačbe

1	1		-1	
1	1		-6	
1	1		+4	
1		1		-3
1		1		0
1		1		+6

38.7
35.3
32.1
26.2
27.3
33.4

RHS ↘

1	1	1	1	1	1
1	1	1			
			1	1	1
-1	-6	+4			
			-3	0	+6

6	3	3	-3	+3
3	3	0	-3	0
3	0	3	0	+3
-3	-3	0	53	0
+3	0	+3	0	45

193.0
106.1
86.9
-122.1
+121.8

Nastavimo sistem enačb - ovce I

- matrika koeficientov je kvadratna in simetrična

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_i(x_{ij} - 91) + e_{ij}$

	μ	P_1	P_2	b_1	b_2	desna stran
μ	6	3	3	-3	+3	193.0
P_1		3	0	-3	0	106.1
P_2			3	0	+3	86.9
b_1	simetrično			53	0	-122.1
b_2					45	+121.8

Nastavimo sistem enačb - ovce II

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_I(x_{ij} - 91) + b_{II}(x_{ij} - 91)^2 + e_{ij}$

Upoštevajmo: $z_{ij} = x_{ij} - 91$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \mu} = \frac{\partial \sum \left(y_{ij} - E\left(y_{ij}\right)\right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_I z_{ij} - b_{II} z_{ij}^2 \right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_I z_{ij} - b_{II} z_{ij}^2 \right)^2}{\partial P_{i'}} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_I z_{ij} - b_{II} z_{ij}^2\right)^2}{\partial b_I} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_I z_{ij} - b_{II} z_{ij}^2\right)^2}{\partial b_{II}} =$$

- dokončajte delo

Nastavimo sistem enačb - ovce II

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_I(x_{ij} - 91) + b_{II}(x_{ij} - 91)^2 + e_{ij}$

Upoštevajmo: $z_{ij} = x_{ij} - 91$

	μ	P_1	P_2	b_I	b_{II}	desna stran
μ	n	n_1	n_2	Σz_{ij}	Σz_{ij}^2	$\sum y_{ij}$
P_1		n_1	0	Σz_{1j}	Σz_{1j}^2	$\sum y_{1j}$
P_2			n_2	Σz_{2j}	Σz_{2j}^2	$\sum y_{2j}$
b_I	simetrično			Σz_{ij}^2	Σz_{ij}^3	$\sum z_{ij} y_{ij}$
b_{II}					Σz_{ij}^4	$\sum z_{ij}^2 y_{ij}$

Matrika dogodkov $\mathbf{X}$

Matrika $\mathbf{X}$	μ	P_1	P_2	b_I	b_{II}
38.7	1	1		-1	1
35.3	1	1		-6	36
32.1	1	1		+4	16
26.2	1		1	-3	9
27.3	1		1	0	0
33.4	1		1	+6	36

Preverimo sistem enačb za ovce II

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_I(x_{ij} - 91) + b_{II}(x_{ij} - 91)^2 + e_{ij}$

	μ	P_1	P_2	b_I	b_{II}	desna stran
μ	6	3	3	0	98	193.0
P_1		3	0	-3	53	106.1
P_2			3	+3	45	86.9
b_I		simetrično		98	1296	-0.3
b_{II}					2930	3261.3

Primer - ovce III

Pa-		Rojstna		Odstavitev					
sma	i	masa (kg)		Starost (dni)			Masa (kg)		
T	1	4.0	+1.0	90	-1	-1	38.7	38.70	-38.7
T	1	3.2	+0.2	85	-6	-1.2	35.3	7.06	-211.8
T	1	2.8	-0.2	95	+4	-0.8	32.1	-6.42	128.4
JS	2	2.5	-0.5	88	-3	1.5	26.2	-13.10	-78.6
JS	2	2.5	-0.5	91	0	0	27.3	-13.65	0.0
JS	2	3.0	0.0	97	+6	+0	33.4	0.00	200.4
↑		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P_i		x_{Mij}	(z_{Mij})	x_{Sij}	(z_{Sij})	$(z_{Mij}z_{Sij})$	y_{ij}	$(z_{Mij}y_{ij})$	$(z_{sij}y_{Sij})$

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_M(x_{Mij} - 3.0) + b_S(x_{Sij} - 91) + e_{ij}$

Nastavimo sistem enačb - ovce III

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_M(x_{Mij} - 3.0) + b_S(x_{Sij} - 91) + e_{ij}$

Upoštevajmo: $z_{Mij} = x_{Mij} - 3.0$, $z_{Sij} = x_{Sij} - 91$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \mu} = \frac{\partial \sum \left(y_{ij} - E\left(y_{ij}\right)\right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_M z_{Mij} - b_S z_{Sij}\right)^2}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_M z_{Mij} - b_S z_{Sij}\right)^2}{\partial P_{i'}} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_M z_{Mij} - b_S z_{Sij} \right)^2}{\partial b_M} =$$

$$\frac{\partial \sum \left(y_{ij} - \mu - P_i - b_M z_{Mij} - b_S z_{Sij} \right)^2}{\partial b_S} =$$

- dokončajte delo

Sistem enačb s simboli - ovce III

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_M(x_{Mij} - 3.0) + b_S(x_{Sij} - 91) + e_{ij}$

	μ	P_1	P_2	b_M	b_S	desna stran
μ	n	n_1	n_2	$\sum z_{Mij}$	$\sum z_{Sij}$	$\sum y_{ij}$
P_1		n_1	0	$\sum z_{M1j}$	$\sum z_{S1j}$	$\sum y_{1j}$
P_2			n_2	$\sum z_{M2j}$	$\sum z_{S2j}$	$\sum y_{2j}$
b_M	simetrično			$\sum z_{Mij}^2$	$\sum z_{Mij} z_{Sij}$	$\sum z_{Mij} y_{ij}$
b_S					$\sum z_{Sij}^2$	$\sum z_{Sij} y_{ij}$

Primer - ovce III

Pa-		Rojstna			Odstavitev				
sma	i	masa (kg)		Starost (dni)			Masa (kg)		
T	1	4.0	+1.0	90	-1	-1	38.7	38.70	-38.7
T	1	3.2	+0.2	85	-6	-1.2	35.3	7.06	-211.8
T	1	2.8	-0.2	95	+4	-0.8	32.1	-6.42	128.4
JS	2	2.5	-0.5	88	-3	1.5	26.2	-13.10	-78.6
JS	2	2.5	-0.5	91	0	0	27.3	-13.65	0.0
JS	2	3.0	0.0	97	+6	+0	33.4	0.00	200.4
↑		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P_i		x_{Mij}	(z_{Mij})	x_{Sij}	(z_{Sij})	$(z_{Mij}z_{Sij})$	y_{ij}	$(z_{Mij}y_{ij})$	$(z_{sij}y_{Sij})$

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_M(x_{Mij} - 3.0) + b_S(x_{Sij} - 91) + e_{ij}$

Matrika dogodkov $\mathbf{X}$

Matrika $\mathbf{X}$	μ	P_1	P_2	b_M	b_S
38.7	1	1		+1.0	-1
35.3	1	1		+0.2	-6
32.1	1	1		-0.2	+4
26.2	1		1	-0.5	-3
27.3	1		1	-0.5	0
33.4	1		1	0.0	+6

Preverimo sistem enačb - ovce III

Model: $y_{ij} = \mu + P_i + b_M(x_{Mij} - 3.0) + b_S(x_{Sij} - 91) + e_{ij}$

	μ	P_1	P_2	b_M	b_S	desna stran
μ	6	3	3	+0.0	+0.0	193.0
P_1		3	0	+1.0	-3.0	106.1
P_2			3	-1.0	+3.0	86.9
b_M	simetrično			1.58	-1.5	12.59
b_S					98.0	-0.3

Več primerov pri ovcah

Pasma	Spol	Rejec	Rojstna masa	Odstavitvena starost	Odstavitvena masa
T	1	KM	4.0	90	38.7
T	2	KM	3.5	85	35.3
T	1	ZA	3.0	95	37.9
T	2	ZA	3.9	85	28.3
JS	1	FT	3.4	88	26.2
JS	2	JU	3.2	91	27.3
JS	1	JU	3.0	97	33.4
B	2	BJ	2.6	100	29.7
B	1	BJ	3.3	88	31.7
B	2	KA	2.9	93	28.3
B	1	KA	3.6	75	25.0
B	2	KA	3.1	93	30.2

Nastavite statistične modele

Model 1: Vključite pasmo, spol, rojstno maso ugnezdeno znotraj spola in starost znotraj pasme. Za kvantitativne vplive uporabite linearno regresijo.

Model 2: Vključite pasmo, rejca, rojstno maso, starost in interakcijo med rojstno maso in starostjo. Za kvantitativne vplive uporabite linearno regresijo.

Model 3: Vključite pasmo, spol, rejca in vse možne interakcije med temi vplivi.

Model 4: Vključite spol, rejca, interakcijo med spolom in rejcem, starost. Kvantitativne vplive vključite v model kot polinom tretje stopnje.

Model 5: Vključite pasmo, spol, rejca, rojstno maso ugnezdeno znotraj spola in starost s kvadratno regresijo.

Model 6: Vključite pasmo, spol, rojstno maso in starost. Uvedimo nove neodvisne spremenljivke, kjer kvantitativne spremenljivke korenimo. Za kvantitativne vplive uporabite linearno regresijo.

Vaja: metoda najmanjših kvadratov

- Nastavite sistem enačb (matriko koeficientov in desno stran enačbe) simbolično
- in z vrednostmi

1. $y_{ijk} = \mu + P_i + S_j + b_{Mj}(x_{Mijk} - 3.3) + b_{Si}(x_{Sijk} - 90) + e_{ijk}$
2. $y_{ijk} = \mu + P_i + R_{ij} + b_M(x_{Mijk} - 3.3) + b_S(x_{Sijk} - 90) + b_{MS}(x_{Mijk} - 3.3)(x_{Sijk} - 90) + e_{ijk}$
3. $y_{ijkl} = \mu + P_i + S_j + R_{ik} + PS_{ij} + RS_{ijk} + e_{ijkl}$
4. $y_{ijk} = \mu + S_i + R_j + SR_{ij} + b_I(x_{ijk} - 90) + b_{II}(x_{ijk} - 90)^2 + b_{II}(x_{ijk} - 90)^3 + e_{ijk}$
5. $y_{ijkl} = \mu + P_i + S_j + R_{ik} + b_{Mj}(x_{Mijkl} - 3.3) + b_{IS}(x_{Sijkl} - 90) + b_{IIS}(x_{Sijkl} - 90)^2 + e_{ijkl}$
6. $y_{ijk} = \mu + P_i + S_j + b_M(x_{Mijk} - 3.3) + b_1\sqrt{x_{Mijk}} + b_S(x_{Sijk} - 90) + b_2\sqrt{x_{Sijk}} + e_{ijk}$