Poglavje 1

MATRIČNI ZAPIS MODELA IN OSNOVE MATRIČNE OPERACIJE

1.1 Skalar

Skalar je matrika reda 1 x 1. Skalarji so označeni z malimi ali velikimi navadnimi (neodebeljene) črkami kot npr. y_{ij}(odvisna slučajna spremenljivka), a_{ijk}(vpliv živali kot naključni vpliv), $\boldsymbol{\beta}_i$(eden od nivojev pri sistematskemu vplivu), b (regresijski koeficient), x_{ijk}(neodvisna spremenljivka), x_{ij} (element v matriki $\mathbf{X}$) ali c (konstanta). V oklepaju je omenjena ena od možnosti, ki jih bomo srečali pri biometriji. Oznaka skalarja ni dovolj, da bi vedno prepoznali njegovo vlogo. Pomembno je, da so uporabljene oznake obrazložene v vsakem primeru posebej, čeprav lahko pri običajnih, pogostih primerih o pomenu skoraj zanesljivo sklepamo.

Število vrstic ali stolpcev določata *red* vektorja.

1.2 Vektor

***Definicija*:** Vektor je polje števil ali simbolov urejenih samo v eno vrstico in en stolpec.

Vektorji so matrike, ki imajo eno samo vrstico (vrstični vektorji) oziroma en stolpec (stolpični vektor). Pisali jih bomo z malimi odebeljenimi črkami npr. $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ ali $\boldsymbol{\beta}$. Tako bomo označili stolpične vektorje. Vrstični vektorji so pravzaprav transponirani stolpični vektorji (glej tudi 1.3.1) in jih bomo označili $\mathbf{y}'$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{x}'$ ali $\boldsymbol{\beta}'$ ali $\mathbf{y}^T$, $\mathbf{u}^T$, $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{x}^T$ ali $\boldsymbol{\beta}^T$. Tam, kjer ne moremo uporabiti odebeljenih črk, uporabljamo lahko navadno pisavo, vektor pa podčrtamo z znakom ~, npr. $\underset{\sim}{y}$.

1.3 Matrika

***Definicija*:** Matrika je polje števil ali simbolov urejenih v vrstice in stolpce.

Označevali jih bomo z velikimi, odebeljenimi črkami kot npr. $\mathbf{X}$ (matrika dogodkov za sistematske vplive), $\mathbf{Q}$ (matrika kvadratne oblike), $\mathbf{A}$ (matrika sorodstva), $\mathbf{V}$ fenotipskih matrika varianc in kovarianc. To je le nekaj matrik, ki bodo imele pri biometriji poseben pomen. Z oznakami $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ali $\mathbf{X}$ pa lahko enostavno mislimo samo na matrike brez posebnega pomena. Tako kot pri vektorjih je tudi pri matrikah pomemben opis, kaj matrika predstavlja. Tam, kjer ne moremo uporabiti odebeljenih črk, uporabljamo lahko navadno pisavo, oznako za matriko pa podčrtamo z znakom ~.

Matrika $\mathbf{A}$ v enačbi 1.1 vsebuje osem elementov - posameznih vrednosti. Matrika ima svoje elemente razvrščene v stolpce in vrstice. V enačbi 1.2 poudarimo, da matriko $\mathbf{A}$ sestavljajo vrstice - vrstični vektorji $\mathbf{a}_i'$. Vrstični vektorji iz matrike so označeni s krepko malo črko ($\mathbf{a}$), ki nas spominja na ime matrike, z apostrofom ($\mathbf{a}'$) in indeksom ($\mathbf{a}_\mathbf{i}'$), ki označuje vrstico. Naša matrika $\mathbf{A}$ ima dve vrstici, ki sta prikazani v enačbah 1.3 in 1.4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 7 \end{bmatrix} \qquad [1.1]$$

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{a}_i' \right\} \qquad [1.2]$$

$$\mathbf{a}_1^{'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad [1.3]$$

$$\mathbf{a}_2^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad [1.4]$$

Matriko **A** prav tako lahko prikažemo s stolpci (enačba 1.5). V enačbah 1.6 in 1.7 prikazujemo prvi in tretji stolpec matrike **A**. Stolpični vektorji iz matrike so označeni s krepko malo črko (**a**), ki nas spominja na ime matrike, z indeksom($\mathbf{a_j}$), ki označuje stolpec.

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{a}_j\right\} \quad [1.5]$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [1.6]$$

$$\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad [1.7]$$

Posamezne celice v matriki poimenujemo elementi matrike. Matrika **A** iz enačbe 1.1 ima osem elementov. Element je skalar. Označeni so z malo črko (a), ki nas spominja na ime matrike, z indeksoma (a_{ij}), ki označujeta vrstico in stolpec. Matriko zapišemo tudi, kot prikazujemo v enačbi 1.8. V enačbi 1.9 prikazujemo element matrike **A** (enačba 1.1) iz druge vrstice in tretjega stolpca. Element ima vrednost 9 in je skalar.

$$\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\} \quad [1.8]$$

$$a_{23} = 9 \quad [1.9]$$

Matrika **C** ima r vrstic in c stolpcev (primer 1.10). Število vrstic in stolpcev določata *red* matrike. Red matrike **C** je r x c. Red matrike **B** je 2 x 4. Če želimo red matrike poudariti, ga navedemo v indeksu matrike (1.11).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1c} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rc} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \quad [1.10]$$

$$A_{2x4},\ C_{rxc},\ B_{2x4} \quad [1.11]$$

Pri kvadratnih matrikah (glej 1.3.1) lahko navedemo samo eno vrednost. Matrika **V** (1.12) je matrika fenotipskih varianc in kovarianc, zato je kvadratna. Ima 10 vrstic in 10 stolpcev. Pri kvadratnih matrikah lahko navedemo red matrike na dva načina.

$$\mathbf{V_{10x10}} = \mathbf{V_{10}} \quad [1.12]$$

Posamezna števila ali simboli so *elementi* matrike. Elemente matrike **V** bomo poimenovali z malimi črkami $\left(v_{ij}\right)$. Indeksa i in j določata vrstico in stolpec, katerima element pripada. Prvi indeks označuje vrstico, drugi stolpec brez ozira na črko.

Pri matrikah določamo tudi *rang matrike*: število neodvisnih vrstic in stolpcev.

1.3.1 Posebne matrike

a) Kvadratne matrike (primer 1.13) imajo toliko vrstic kot stolpcev.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad [1.13]$$

b) Simetrične matrike (primer 1.14) so kvadratne matrike, za katere velja $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad [1.14]$$

Med kvadratne matrike prištevamo matrike varianc in kovarianc, matriko koeficientov v sistemu enačb, kakor tudi matrike kvadratnih oblik.

c) Diagonalne matrike (primer 1.15) so simetrične matrike, ki imajo od 0 različne elemente samo na diagonali. Vsi nediagonalni elementi imajo vrednost enako 0.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad [1.15]$$

Diagonalno matriko lahko zapišemo tudi v obliki iz enačbe 1.16. Pri elementu d_{ii} se ponovita dva indeksa i, s čimer poudarimo, da so elementi od 0 različni samo na diagonali, vsi nediagonalni elementi pa imajo vrednost 0.

$$\mathbf{D} = \{d_{ii}\} \qquad [1.16]$$

č) Identična matrika (primer 1.17) je diagonalna matrika, pri kateri so vsi diagonalni elementi enaki 1. Označimo jo z **I**, praviloma moramo omeniti oziroma določiti tudi red matrike.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [1.17]$$

d) Ničelna matrika ima vse elemente enake 0. Označimo jo z **0**, praviloma moramo določiti tudi red matrike.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [1.18]$$

Ničelne matrike bomo srečevali predvsem kot delne matrike v matrikah dogodkov, matrikah varianc in kovarianc itd. Znak za ničelno matriko (**0**) uporabimo tudi za poudarjanje dela matrike, ki je zapolnjen z ničlami, čeprav del matrike ni pravokotne oblike. Tako bi diagonalno matriko lahko zapisali tudi v obliki, predstavljeni v enačbi 1.19.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & \mathbf{0} & \\ & & d_{33} & & \\ & \mathbf{0} & & d_{44} & \\ & & & & d_{55} \end{bmatrix} \qquad [1.19]$$

e) Blok-diagonalna matrika je matrika, ki imajo vzdolž diagonale nanizane matrike. Poglejmo si matriko **R** iz enačbe 1.20. Na diagonali imamo varianci za dve lastnosti, ki se izmenično izmenjujeta. Večina nediagonalnih elementov je enaka 0, samo med dvema zaporednima vrsticama je nakazana kovarianca za ostanek med obema lastnostima ($\sigma_{e_1 e_2}$). V nadaljevanju bomo nekoliko poenostavili poimenovanje za kovarianco ($\sigma_{e_{12}}$). Obe oznaki jo zadostno opišeta.

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} & & & & & \\ \sigma_{e_1 e_2} & \sigma^2_{e_2} & & & & & \\ & & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} & & & \\ & & \sigma_{e_{12}} & \sigma^2_{e_2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} \\ & & & & & \sigma_{e_{12}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} = \qquad [1.20]$$

Zamenjajmo torej zaradi enostavnosti oznako in poudarimo diagonalne matrike. Mala diagonalna matrika ima dve vrstici in dva stolpca. Je kvadratna in simetrična. Vsebuje 3 komponente kovariance. Matriko bomo poimenovali $\mathbf{R}_0$. Vsebuje varianco za prvo in drugo lastnost ter kovarianco, če sta meritvi opravljeni na isti živali.

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} \\ \sigma_{e_{12}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} & & & \\ \mathbf{R}_0^{\uparrow} \rightarrow & \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} \\ \sigma_{e_{12}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} & & \leftarrow_{\downarrow} \mathbf{R}_0 \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{12}} \\ \sigma_{e_{12}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad [1.21]$$

Zaradi preglednosti lahko matriko 1.22 prepišemo tako, da namesto diagonalnih blokov navedemo kar matriko $\mathbf{R}_0$.

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & & & \\ & \mathbf{R}_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \qquad [1.22]$$

Blokdiagonalno matriko lahko zapišemo tudi kot direktno vsoto ($\sum^{\oplus}$) matrik $\mathbf{R}_0$ (enačba 1.24). V literaturi najdemo tudi druge zapise direktne vsote ($\bigoplus$, $\sum^{+}$). Zapis je primeren za velike blokdiagonalne matrike.

$$= \sum{}^{\oplus} \mathbf{R}_0 \qquad [1.23]$$

Matrike na diagonali so lahko različnega reda. Pri različnem številu meritev na posamezni živali bodo na diagonali matrike $\mathbf{R}_{0i}$ različnega reda. Čeprav bomo matrike sestavljali kasneje, smo uporabili kar primere, ki nam bodo prišli prav kasneje. Tu je pomembno, da se zapomnimo zapis in si matriko potem tudi predstavljamo.

$$= \sum{}^{\oplus} \mathbf{R}_{0i} \qquad [1.24]$$

V tem primeru smo prikazali matriko, ki je kvadratne oblike in simetrična, vendar pa to ni pogoj za blokdiagonalno matriko, saj so lahko tudi pravokotne. V matriki dogodkov za dve lastnosti (dnevni prirast in debelina slanine) sta na diagonali dve pravokotni matriki $\mathbf{X}_D$ in $\mathbf{X}_S$, različnega reda.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_S \end{bmatrix} \qquad [1.25]$$

Kadar so blokdiagonalne matrike označene s številkami, jih lahko zapišemo v obliki direktne vsote, kot je prikazano v enačbi 1.26.

$$\sum \oplus \mathbf{X}_i \qquad [1.26]$$

f) Transponirana matrika Transponirane matrike označimo z apostrofom ($\mathbf{A}'$) ali črko T v eksponentu ($\mathbf{A}^T$) in jo dobimo tako, da zamenjamo vrstice in stolpce. Tako ima $\mathbf{A}'$ (1.27) v stolpcih vrednosti iz vrstic matrike $\mathbf{A}$ (enačba 1.1).

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad [1.27]$$

g) Idempotentna matrika $\mathbf{M}$ je kvadratna in za njo velja $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$. Idempotentne matrike bomo omenjali pri kvadratnih oblikah, ki nam predstavljajo vsote kvadratov.

h) Delne matrike (ang. submatrix). Matriko razcepimo na manjše matrike (enačba 1.28). Običajno to naredimo glede na strukturo matrik. Kasneje bomo spoznali zanimive matrike, kamor urejujemo informacije iz podatkov in porekla. Delitev matrik lahko nakažemo s pikčastimi črtami. Delne matrike smo prikazali na primeru matrik dogodkov v enačbi 1.25.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad [1.28]$$

Kot primer navajamo matriko koeficientov (1.29) iz enačb mešanega modela. V zgornjem levem kotu so zbrane informacije o sistematskem delu modela ($\mathbf{X}'\mathbf{X}$), v spodnjem desnem kotu bom našli naključni del ($\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}\sigma_e^2\sigma_a^{-2}$), nediagonalna dela ($\mathbf{X}'\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}'\mathbf{X}$) pa povezujeta sistematski in naključni del. Pri našem delu bomo razčlenitev opravili predvsem zaradi preglednosti, čeprav je bolj pomembna pri izpeljavi posameznih enačb ali pri dokazih.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}\sigma_e^2\sigma_a^{-2} \end{bmatrix} \qquad [1.29]$$

i) Trikotna matrika je kvadratna in ima od nič različne nediagonalne elemente samo nad ali pod diagonalo. Tako ločimo spodnjo trikotno matriko (ang. lower triangular matrix, 1.30) in zgornjo trikotno matriko (ang. upper triangular matrix, 1.31). Ime nosi po zapolnjenem delu matrike.

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad [1.30]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \qquad [1.31]$$

j) Pozitivno definitne matrike so kvadratne, simetrične in imajo dominantno diagonalo. S Cholesky razčlevitvijo (ang. Cholesky decomposition) najdemo tako spodnjo trikotno matriko **L**, da je njen produkt s transponirano mariko **L′** pozitivno definitna matrika **A** (ang. positive definit matrix). Diagonalni elementi v matriki **L** so pozitivni in večji od nič.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}' \qquad [1.32]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \qquad [1.33]$$

Vse matrike varianc in kovarianc morajo biti pozitivno definitne. Na diagonali so variance, na nediagonalnih elementih pa kovariance. Vzemimo, da je matrika **A** reda 1 x 1, torej je le skalar. V tem primeru je edini element v matriki **A** varianca σ^2, element v matriki **L** pa standardni odklon σ. Tako si Cholesky razčlenitev lahko predstavljamo, da je v matrični algebri podobna operacija kot kvadratni koren v skalarni algebri.

k) Semi-pozitivno definitne matrike so zelo podobne pozitivno definitnim matrikam, le v matriki **L** je na diagonali dovoljena tudi vrednost 0.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \qquad [1.34]$$

1.4 Seštevanje matrik in vektorjev

Definicija:

$$\mathbf{A}_{pxq} + \mathbf{B}_{pxq} = \mathbf{C}_{pxq} \qquad [1.35]$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad [1.36]$$

Matrike (enačba 1.35), ki jih seštevamo, morajo imeti isto število vrstic in isto število stolpcev. Vsoto matrik dobimo tako, da seštevamo istoležne elemente (enačba 1.36). Rezultat je istega reda kot matrike, ki jih seštevamo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 0+0 \\ -1+2 & 2+1 \\ 3-2 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad [1.37]$$

Osnovna pravila

Matrike istega reda lahko seštevamo po kateremkoli vrstnem redu.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad [1.38]$$

1.5 Množenje matrik

Definicija:

$$\mathbf{A}_{pxq} * \mathbf{B}_{qxr} = \mathbf{C}_{pxr} \quad [1.39]$$

Matriki **A** in **B** iz enačbe 1.39 pomnožimo tako, da pomnožimo i-to vrstico matrike **A** z j-ti stolpcem matrike **B** ter produkte posameznih parov seštejemo (enačba 1.40). Tako dobimo vrednost elementa na presečišču i-te vrstice in j-tega stolpca matrike **C**. Prva matrika mora zato imeti toliko stolpcev (q) kot druga matrika vrstic. Rezultat (matrika **C**) ima toliko vrstic (p) kot prva matrika (**A**) in toliko stolpcev (r) kot druga matrika (**B**).

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} * b_{jk} \quad [1.40]$$

Za vajo pomnožimo dve pravokotni matriki (enačba 1.41).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3x2} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & -3 & 14 \end{bmatrix}_{3x4} \quad [1.41]$$

Priporočamo, da si matrike, kadar jih množite na pamet, uredite na naslednji način. Prostor razdelimo v štiri kvadrante (prikaz 1.42). Levi zgoraj ostane prazen, levo spodaj pa napišemo prvo matriko. Drugo matriko, s katero prvo pomnožimo, napišemo desno zgoraj. Rezultat napišemo v desni spodnji kvadrat.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & -3 & 14 \end{bmatrix} \end{array} \quad [1.42]$$

Množenje lahko verižno nadaljujemo (prikaz 1.43). S sistematičnim pristopom lahko delo hitreje opravimo in zmanjšamo možnost napak. Končni rezultat **ABCD** ima vrstic kot matrika **A** in stolpcev kot matrika **D**. Pri množenju matrik moramo vedno preveriti, da se redi zaporednih matrik ujemajo.

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{AB} & \mathbf{ABC} & \mathbf{ABCD} \end{array} \quad [1.43]$$

Osnovna pravila

Pri množenju več matrik zapored lahko množimo med sabo katerekoli sosednje matrike (enačba 1.44).

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) \quad [1.44]$$

Vrstnega reda matrik pri množenju ne smemo menjati (enačba 1.45).

$$\mathbf{ABCD} \neq \mathbf{BCAD} \quad [1.45]$$

Transponirano matriko produkta matrik **ABCD** dobimo lahko tudi tako, da množimo transponirane matrike v obratnem vrstnem redu ($\mathbf{D}^T\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$).

$$(\mathbf{ABCD})^T = \mathbf{D}^T\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \qquad [1.46]$$

Če vsoto matrik pomnožimo z tretjo matriko (enačbi 1.47 in 1.48), lahko najprej vsako od matrik pomnožimo z isto matriko in potem seštejemo. Velja pa tudi obratno: matriko, ki je skupna več členom v enačbi, lahko izpostavimo.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad [1.47]$$

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} \qquad [1.48]$$

Pri tem mora biti matrika, ki jo želimo izpostaviti, na isti poziciji. Tako torej ne moremo izpostaviti matrike **A** iz enačbe 1.49, ker je matrika **B** množena z matriko **A** od leve, matrika **D**pa od desne.

$$\mathbf{AB} - \mathbf{DA} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}-\mathbf{D}) \qquad [1.49]$$

1.6 Determinanta

1.7 Inverzna matrika

1.8 Splošna inverza

Vzemimo, da imamo sistem enačb $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$. Rešitev za vektor neznanih parametrov **x** dobimo tako, da od spredaj množimo z $\mathbf{A}^{-1}$, kar lahko storimo ob pogoju, da ima matrika **A** poln rang. Vendar pa obstajajo številni primeri, ko to ne drži: rang matrike **A** je manjši od reda matrike, determinanta matrike je enaka nič. Sistem enačb v tem primeru nima ene same rešitve. Če ima rešitev, jih ima neskončno mnogo. Eno, izbrano rešitev pa lahko dobimo tako, da uporabimo splošno inverzo. Označili jo bomo z $\mathbf{A}^{-}$. Izbrali pa bomo tisto, pri kateri velja: $\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Praviloma pa niti $\mathbf{AA}^{-}$ niti $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}$ nista enaka identični matriki **I**.

Matrika **A** ima neskončno mnogo splošnih inverz, če ima vsaj eno. Pri vsaki možni rešitvi sistema uporabimo drugo splošno inverzo. Poglejmo pa si enostaven postopek, da najdemo prvo splošno inverzo.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.50]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.51]$$

- v matriki **A** poiščite vse odvisne vrstice, jih napolnite z ničlami. Z ničlami napolnimo tudi stolpec. Pri simetričnih matrikah izberemo isto vrstico in isti stolpec.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \dots \qquad [1.52]$$

- ostane vam samo toliko neodvisnih vrstic in stolpcev, kot je rang sistema

- iz neodvisnih vrstic in stolpcev nastavite podmatriko in poiščite njeno inverzo

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \dots \qquad [1.53]$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \dots \qquad [1.54]$$

- inverzi dodajte izpuščene vrstice in stolpce, ki so polni samih ničel

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \dots \qquad [1.55]$$

Tako pripravljene splošne inverze lahko uporabimo pri reševanju sistema enačb. Vzemimo prvo splošno inverzo iz 1.55.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [1.56]$$

Naredimo preizkus. Nadomestimo vektor neznank iz enačbe 1.50 z rešitvami iz 1.56. Kadar rešitve z leve pomnožimo z matriko koeficientov, moramo dobiti desno stran sistema enačb iz 1.50.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.57]$$

V tem primeru se je preizkus izšel. Našli smo prvi niz rešitev. Vzemimo še drugo splošno inverzo iz 1.55.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/6 \\ 0 \\ -1/5 \end{bmatrix} \qquad [1.58]$$

Tokrat smo dobili povsem druge rešitve. Pa opravimo preizkus, da se prepričamo o pravilnosti rešitve. Tako kot v prvem primeru pomnožimo nov niz rešitev iz 1.58 in ga z leve pomnožimo z matriko koeficientov iz 1.50.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15/6 \\ 0 \\ -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.59]$$

Tudi tu je bil preizkus uspešen. Zmnožek je enak desni strani v enačbi 1.50.

Pri splošnih inverzah smo hitro našli še eno. Poiskusimo priti do rešitev še s tretjo splošno inverzo iz 1.55. Pri tej smo do rešitev prišli lahko še veliko hitreje kot pri prvih dveh, a dobili smo nov niz rešitev.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15/6 \\ 14/6 \end{bmatrix} \qquad [1.60]$$

Tabela 1.1: Ocenljive enačbe

Rešitev	1	2	3	4	1.65
$\hat{\mu} + \frac{(\hat{A}_1+\hat{A}_2)}{2} =$	$^{29}/_{12}$	$^{29}/_{12}$	$^{29}/_{12}$	$^{29}/_{12}$	$^{29}/_{12}$
$\hat{A}_1 - \hat{A}_2 =$	$^{2}/_{12}$	$^{2}/_{12}$	$^{2}/_{12}$	$^{2}/_{12}$	$^{2}/_{12}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ^{15}/_{6} \\ ^{14}/_{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.61]$$

Tudi v tem primeru je preizkus uspešen. Splošnih inverz nismo več našli na hitro, a jih obstaja še neskončno mnogo, zato bi bilo povsem nesmiselno, da poiščemo vse. Lahko pa se naučimo načina, da takrat, ko poznamo eno rešitev, preverimo druge. To lahko preverimo, če smo res dobili eno od rešitev sistema enačb, čeprav se razlikuje od rešitve, ki jo navaja nekdo drug. Najprej pa bi rada vedela od vas, če je vektor iz 1.62 tudi rešitev sistema enačb 1.50.

$$\begin{bmatrix} ^{29}/_{12} \\ ^{1}/_{12} \\ -^{1}/_{12} \end{bmatrix} \qquad [1.62]$$

Preizkus smo opravili povsem enako kot predhodne in ugotovili, da je tudi predlagani vektor iz 1.62 rešitev.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{29}/_{12} \\ ^{1}/_{12} \\ -^{1}/_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.63]$$

Postavimo vse rešitve skupaj (v 1.64), jih postavimo na isti imenovalec in primerjajmo. Kaj imajo rešitve skupnega?

$$\begin{bmatrix} ^{28}/_{12} \\ ^{2}/_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ^{30}/_{12} \\ 0 \\ -^{2}/_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ ^{30}/_{12} \\ ^{28}/_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ^{29}/_{12} \\ ^{1}/_{12} \\ -^{1}/_{12} \end{bmatrix} \ \ldots \qquad [1.64]$$

Poskusimo ovrednotiti dve enačbi iz vseh štirih rešitev (pregl. 1.1). Vrednost navedenih dveh enačb je enaka, kadar jih izvrednotimo iz kateregakoli niza podatkov.

Poskusimo si sedaj izmisliti še kakšno rešitev. Postavimo oceno $\hat{A}_1$ na vrednost $^{100}/_{12}$in se poslužimo enačb v tabeli 1.1. Našli smo novo rešitev. Iz zadnjega stolpca ponovno izvrednotimo enačbi v pregl. 1.1.

$$\begin{bmatrix} \\ ^{100}/_{12} \\ \\ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \\ ^{100}/_{12} \\ ^{98}/_{12} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -^{70}/_{12} \\ ^{100}/_{12} \\ ^{98}/_{12} \end{bmatrix} \qquad [1.65]$$

Da bomo res prepričani, jo preverimo še tako, da jo pomnožimo z matriko koeficientov.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -^{70}/_{12} \\ ^{100}/_{12} \\ ^{98}/_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad [1.66]$$

Preveritev je tudi tokrat uspešna. Torej smo našli nov niz rešitev. Enačba modela je v tem primeru enostavna (pregl. 1.2), saj vsebuje samo srednjo vrednost (μ) in sistematski vpliv z dvema nivojema (A_i).

Tabela 1.2: Število parametrov in stopinj prostosti

$y_{ij} =$	μ	$+A_i$	$+e_{ij}$
Število parametrov	1	2	
Število stopinj prostosti	1	1	

Število parametrov nam pove, da imamo tri neznanke. Ocenimo lahko samo dva, do tretjega pa "nekako" pridemo. Ponavadi smo delali tako, da smo ocenljive parametre dobili iz rešitev, ki nam jih ponudi statistični paket, potem pa smo ostale rešitve preračunali. Možna pa je tudi pot, ki smo jo pravkar nakazali. Parametre, ki so nam zaradi odvisnosti odpadli, postavimo na neko (katerokoli) vrednost. Statistični paket SAS postavi vse “odpadle” vrednosti na 0. Ostale vrednosti pa določimo tako, da ne kršimo ocenljivih enačb.

Rešitev tako lahko dobimo neskončno mnogo. Iz samih vrednosti v različnih nizih ne moremo vedno prepoznati uporabnih vrednosti. Če pa znamo postaviti ocenljive funkcije, pa bomo vsi prišli do istih zaključkov, neodvisno od niza rešitev. Število neodvisnih linearnih kombinacij nam napovedujejo stopinje prostosti.

1.9 Direktna vsota

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \qquad [1.67]$$

Možni so različni zapisi.

$$\Sigma_i^{\oplus}\mathbf{X}_i = \Sigma_i^{+}\mathbf{X}_i = \bigoplus_i^k \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i \oplus \mathbf{X}_i \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_i & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_i \end{bmatrix} \qquad [1.68]$$

Za vključene matrike sploh ni potrebno, da bi bile istega ranga.

$$\mathbf{x}' \oplus \mathbf{X} \oplus \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \qquad [1.69]$$

Za matrike odgovarjajočega ranga drži

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}+\mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{A}+\mathbf{C} \oplus \mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad [1.70]$$

Če je $\mathbf{A}_i$ polnega ranga, velja naslednje:

$$\left[\Sigma_i^{\oplus}\mathbf{A}_i\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_i^{-1} \end{bmatrix} = \Sigma_i^{\oplus}\mathbf{A}_i^{-1} \qquad [1.71]$$

Za determinanto pa velja:

$$\left|\Sigma_i^{\oplus}\mathbf{A}_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |\mathbf{A}_i| \qquad [1.72]$$

1.10 Kronecker produkt

Vzemimo primer, kjer imamo dve lastnosti (y in z) za vsako od dveh živali. Če lahko zapise opišemo z linearnim modelom, imamo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_2 \\ y_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_z \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{z1} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{bmatrix} \quad [1.73]$$

$$var \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} & a_{12}\sigma^2_{a1} & a_{12}\sigma_{a12} \\ \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} & a_{12}\sigma_{a12} & a_{12}\sigma^2_{a2} \\ a_{12}\sigma^2_{a1} & a_{12}\sigma_{a12} & \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} \\ a_{12}\sigma_{a12} & a_{12}\sigma^2_{a2} & \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} \end{bmatrix} \quad [1.74]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} \\ \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} \\ \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} \end{bmatrix} \\ a_{12} \begin{bmatrix} \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} \\ \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} \sigma^2_{a1} & \sigma_{a12} \\ \sigma_{a12} & \sigma^2_{a2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\mathbf{G}_0 & a_{12}\mathbf{G}_0 \\ a_{12}\mathbf{G}_0 & 1\mathbf{G}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{G}_0 \quad [1.75]$$

Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja matriko sorodstva. Element a_{12} je koeficient sorodstva med obema živalima. Matrika $\mathbf{G}_0$ vsebuje genetske variance in kovariance med lastnostima, merjenima na isti živali.

Poglejmo sedaj še varianco za ostanek (1.76)! Lastnosti merjene na isti živali so med seboj korelirane, saj je velika možnost, da sta obe napaki zaradi spodrsljaja ali napake pri izvajanju poskusa povezane. Žival, ki je pojedla ekstra krmo na račun sovrstnikov, je tako lahko rastla hitreje in imela debelejšo slanino, kot bi pod kontroliranimi pogoji.

$$var \begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{z1} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} & 0 & 0 \\ \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} \\ 0 & 0 & \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} \end{bmatrix} \quad [1.76]$$

Matrika varianc in kovarianc za ostanek $\mathbf{R}$ je blok diagonalna. Kadar so bloki istega reda, matriko $\mathbf{R}$ lahko zapišemo v obliki Kronecker produkta (enačba 1.77) med identično matriko $\mathbf{I}$ in matriko varianc in kovarianc za ostanke meritev na isti živali oz. enoti.

$$= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} \\ \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} \\ \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} \\ \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} \sigma^2_{e1} & \sigma_{e12} \\ \sigma_{e12} & \sigma^2_{e2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\mathbf{R}_0 & 0\mathbf{R}_0 \\ 0\mathbf{R}_0 & 1\mathbf{R}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \quad [1.77]$$

Navedimo še nekaj lastnosti Kronecker produkta. Vzemimo matriki $\mathbf{A}_{pxq}$ in $\mathbf{B}_{mxn}$.

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{C}_{pm \times qn} \quad [1.78]$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}' \quad [1.79]$$

$$\mathbf{x}' \otimes \mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x}' = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}' \quad [1.80]$$

$$k \otimes \mathbf{A} = k\mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes k \quad [1.81]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B} & \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad [1.82]$$

$$\mathbf{A} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_1 & \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad [1.83]$$

Če obstajata produkta **AX** in **BY**, potem velja enačba 1.84.

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \mathbf{AX} \otimes \mathbf{BY} \quad [1.84]$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \quad [1.85]$$

$$rang\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = rang\,(\mathbf{A}) \bullet rang\,(\mathbf{B}) \quad [1.86]$$

Sled, ki predstavlja vsoto diagonalnih elementov matrike, ($tr\,()$) matrik **A** in **B** iz Kroneker produkta lahko dobimo tako, da ovrednotimo sledi obeh matrik in jih nato pomnožimo.

$$tr\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = tr\,(\mathbf{A}) \bullet tr\,(\mathbf{B}) \quad [1.87]$$

Determinanto Kroneker produkta dobimo tako, da izračunamo determinanti obeh matrik, jih damo na potenco, ki je enaka redu druge matrike, in vrednosti pomnožimo.

$$|\mathbf{M}_{m\times m} \otimes \mathbf{N}_{n\times n}| = |\mathbf{M}|^n\,|\mathbf{N}|^m \quad [1.88]$$

$$Lastna\_vrednost\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = Lastna\_vrednost\,(\mathbf{A}) \bullet Lastna\_vrednost\,(\mathbf{B}) \quad [1.89]$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \quad [1.90]$$

S skalarjem k lahko množimo tako prvo (**A**) kot drugo (**B**) matriko ali pa končni rezultat ($\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$). Enačba tudi kaže, da konstanto k lahko izpostavimo.

$$k\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes k\mathbf{B} = k\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \quad [1.91]$$

Če lahko seštejemo matriki **A** in **B**, potem velja:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \quad [1.92]$$

Kronecker produkt uporabljamo pri prikazovanju strukture kompleksnejših modelov.