Poglavje 1

OPIS MODELA V MATRIČNI OBLIKI

Modele v matrični obliki bomo srečali v literaturi, ki opisuje obdelavo podatkov pri selekciji živali in uravnavanju reje. Kot bomo kasneje videli, so zeli splošni in povedo sami zase brez dobrega dodatnega opisa zelo malo o strukturi podatkov. Lahko so dodatno opremljeni z modelom v skalarni obliki. Ker pa so splošni, so zelo primerni za prikaz metod, uporabljenih za reševanje sistemov enačb. Model v matrični obliki si oglejmo najprej kar na primeru.

1.1 Skalarna oblika enačbe modela

Vzemimo podatke iz preglednice 1.1 in uporabimo naslednja modela v skalarni obliki in sicer za dnevni prirast (1.1) in debelino hrbtne slanine (1.2). V modelih bomo označili tudi lastnost in sicer bo prvo lastnost y_{1ijkl} predstavljal dnevni prirast, drugo y_{2ijklm} pa debelina hrbtne slanine. Lastnost smo označili s številkami.

$$y_{1ijkl} = \mu_1 + P_{1i} + M_{1j} + F_{1k} + a_{1ijkl} + e_{1ijkl} \quad [1.1]$$

$$y_{2ijklm} = \mu_2 + P_{2i} + M_{2j} + F_{2k} + b_{2i}\left(x_{ijkl} - \overline{x}\right) + a_{2ijkl} + e_{2ijklm} \quad [1.2]$$

V modelu pomeni:

y_{tijkl}, y_{tijklm}	-	opazovanja za dnevni prirast ($t = 1$) in debelino hrbtne slanine ($t = 2$)
μ_t	-	srednji vrednosti
P_{ti}	-	sistematski vpliv pasme ($i = 1, 2, 3$)
M_{tj}	-	sistematski vpliv meseca ($j = 1, 2$)
F_{tk}	-	sistematski vpliv farme ($k = 1, 2, 3$)
b_{tIi}	-	regresijski koeficient za linearni člen, ugnezden znotraj pasme
x_{ijkl}	-	telesna masa pred zakolom
$\overline{x}$	-	povprečna telesna masa pred zakolom
a_{tijkl}	-	naključni vpliv živali oz. direktni (individualni) aditivni genetski vpliv
e_{tijkl}, e_{tijklm}	-	naključni ostanek

Modela ne vključujeta trivialnih naključnih vplivov. To je vplivov, pri katerih nivoji vpliva niso korelirani. Trivialne naključne vplive bomo prikazali z vključitvijo skupnega okolja v gnezdu. V teh primerih bomo modela razširili, kot je prikazano v enačbi 1.3 za dnevni prirast in enačbi 1.4 za debelino hrbtno slanino. Pri debelini hrbtne slanine smo model razširili tudi za kvadratni člen in uporabili kvadratno regresijo. Tokrat bomo kot oznako za lastnost uporabili črkovno oznako.

$$y_{Dijklm} = \mu_D + P_{Di} + M_{Dj} + F_{Dk} + g_{Dijkl} + a_{Dijklm} + e_{Dijklm} \quad [1.3]$$

$$y_{Sijklmn} = \mu_S + P_{Si} + M_{Sj} + F_{Sk} + b_{SIi}\left(x_{ijklm} - \overline{x}\right) + b_{SIIi}\left(x_{ijklm} - \overline{x}\right)^2 + g_{Sijkl} + a_{Sijklm} + e_{Sijklmn} \quad [1.4]$$

V modelu pomeni:

$y_{tijklm}, y_{tijklmn}$	-	opazovanja za dnevni prirast ($t = D$) in debelino hrbtne slanine ($t = S$)
μ_t	-	srednji vrednosti
P_{ti}	-	sistematski vpliv pasme ($i = 1, 2, 3$)

Tabela 1.1: Preizkus mladic

Žival	Pasma	Mesec	Farma	Masa(kg)	DP (g/dan)	DHS(mm)	
1	SL	JAN	A	102	540	13	13
2	SL	JAN	B	98	550	16	14
3	SL	FEB	C	105	550	16	16
4	SL	FEB	A	102	580	15	12
5	LW	JAN	B	95	520	20	17
6	LW	FEB	C	101	500	24	24
7	LW	FEB	A	101	490	27	25
8	NL	JAN	B	97	560	26	27
9	NL	JAN	C	100	550	22	19
10	NL	FEB	A	97	600	23	25
11	NL	FEB	B	102	610	24	22

Tabela 1.2: Porekla za mladice iz preizkusa

Poreklo 0			Poreklo A			Poreklo B			Poreklo C		
Žival	Mati	Oče	Žival	Mati	Oče	Žival	Mati	Oče	Žival	Mati	Oče
1	-	-	1	12	-	1	12	-	1	15	—
2	-	-	2	12	-	2	12	-	2	15	10
3	-	-	3	-	-	3	-	-	3	15	—
4	-	-	4	-	-	4	-	-	4	15	10
5	-	-	5	13	14	5	13	14	5	14	10
6	-	-	6	13	14	6	13	14	6	14	12
7	-	-	7	-	14	7	-	14	7	14	10
8	-	-	8	-	-	8	-	-	8	13	12
9	-	-	9	-	-	9	-	-	9	—	10
10	-	-	10	-	-	10	-	-	10	15	12
11	-	-	11	-	-	11	-	-	11	—	—
			12	-	-	12	-	-	12	—	—
			13	-	-	13	15	-	13	14	—
			14	-	-	14	15	-	14	16	—
						15	-	-	15	16	—
									16	—	—

M_{tj} - sistematski vpliv meseca ($j = 1, 2$)
F_{tk} - sistematski vpliv farme ($k = 1, 2, 3$)
b_{tIi} - regresijski koeficient za linearni člen, ugnezden znotraj pasme
b_{tIIi} - regresijski koeficient za kvadratni člen, ugnezden znotraj pasme
x_{ijklm} - telesna masa pred zakolom
$\overline{x}$ - povprečna telesna masa pred zakolom
g_{tijkl} - naključni vpliv gnezda oz. skupnega okolja v gnezdu
a_{tijklm} - naključni vpliv živali oz. direktni (individualni) aditivni genetski vpliv
e_{tijklm}, $e_{tijklmn}$ - naključni ostanek

Prav lahko pa bi za prva dva modela uporabili črke kot oznako za lastnosti, prav tako pa bi druga dva označili s številkami. Za vajo to lahko storite sami.

1.2 Matrična oblika enačbe modela

Model za dnevni prirast smo predstavili v enačbah1.5 in 1.6. Če bi obravnavali le eno lastnost, potem je lahko enačba povsem brez indeksov. Ker pa sta si modela za dnevni prirast in debelino tako zelo podobna, pa jih moramo ločiti z dodatnimi indeksi. Za indeks lahko uporabimo številko ali črko.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1 \qquad [1.5]$$

$$\mathbf{y}_D = \mathbf{X}_D\boldsymbol{\beta}_D + \mathbf{Z}_D\mathbf{u}_D + \mathbf{e}_D \qquad [1.6]$$

kjer pomeni:

$\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y}_D$	-	vektor opazovanj ali meritev (ang. observations) za dnevni prirast
$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_D$	-	matrike dogodkov (ang. incidence matrix) za sistematske vplive (ang. fixed effects)
$\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_D$	-	matrika dogodkov za naključne vplive (ang. random effects)
$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_D$	-	vektor parametrov za sistematske vplive (ang. vector of parameters)
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_D$	-	vektor parametrov za naključne vplive
$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_D$	-	vektor ostankov (residual).

Sedaj ne bo težko napisati model še za debelino hrbtne slanine. V enačbi 1.7 smo za indeks uporabili številko 2, ki bo opozoril, da gre za drugo lastnost. Da bi se spomnili, da delamo s slanino, pa smo v enačbi 1.8 raje uporabili črko S.

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_2 \qquad [1.7]$$

$$\mathbf{y}_S = \mathbf{X}_S\boldsymbol{\beta}_S + \mathbf{Z}_S\mathbf{u}_S + \mathbf{e}_S \qquad [1.8]$$

kjer pomeni:

$\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y}_S$	-	vektor opazovanj ali meritev za dnevni prirast
$\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_S$	-	matrike dogodkov za sistematske vplive
$\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_S$	-	matrika dogodkov za naključne vplive
$\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_S$	-	vektor parametrov za sistematske vplive
$\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_S$	-	vektor parametrov za naključne vplive
$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_S$	-	vektor ostankov.

Do sedaj smo obdelali posebej dnevni prirast in nato še debelino hrbtne slanine. Uporabili smo enolastnostno analizo. Kot vir informacij smo uporabili samo meritve za lastnost in poreklo. Nismo pa upoštevali, da sta lastnosti sicer povezani.

Z večlastnostnimi analizami se ne bomo preveč ukvarjali. Omenili jih bomo le toliko, da bomo vedeli, da obstajajo in se predstavljali, kaj se pri njih dogaja. Proces pri reševanju sistemov enačb je povsem enak procesu, ko delamo z eno lastnostjo.

Oba modela lahko sestavimo na način prikazano v enačbi 1.9 in zapišemo poenostavljeno kar v obliki iz 1.12. Slednja oblika je praktična za izpeljavo metode, ne pove pa dosti o poizkusu. Tudi, ko se odločimo za matrično obliko zapisa modela, moramo navajati skalarno obliko enačb ali pa moramo navesti vektor parametrov. Pričakovane vrednosti, strukturo varianc in kovarianc ter morebitne predpostavke pa prikažemo kar z matrikami. Matrike predstavijo strukturo varianc in kovarianc zelo podrobno in pregledno.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 & + & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & + & \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & + & \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \qquad [1.9]$$

Ničelne nediagonalne delne matrike kažejo na to, da meritve ene lastnosti ne uporabljamo neposredno pri vrednotenju druge lastnosti niti pri sistematskih niti pri naključnih vplivih. Enačbi lahko preusedimo tako, da izpostavimo vektorje neznanih parametrov iz členov za sistematski in naključni del modela.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \qquad [1.10]$$

Prepričajmo se, da smo enačbo preuredili pravilno. Skupaj preverimo preureditev tako, da pomnožimo sestavljeno matriko dogodkov in izpostavljeni vektor parametrov za člen s sistematskimi vplivi. Kot vidimo spodaj, je preizkus (prikaz 1.11) uspešen.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 & + & \mathbf{0}\boldsymbol{\beta}_2 \\ \mathbf{0}\boldsymbol{\beta}_1 & + & \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 & + & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & + & \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} \qquad [1.11]$$

Sestavljeno matriko dogodkov lahko označimo z **X** za sistematski del in z **Z** za naključni del, sestavljena vektorja parametrov pa z $\boldsymbol{\beta}$ in **u**. Tako lahko zapišemo večlastnostni mešani model (enačba 1.12).

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \qquad [1.12]$$

kjer pomeni:

y	-	vektor opazovanj ali meritev za obe lastnosti
X	-	matrike dogodkov za sistematske vplive
Z	-	matrika dogodkov za naključne vplive
$\boldsymbol{\beta}$	-	vektor parametrov za sistematske vplive
u	-	vektor parametrov za naključne vplive
e	-	vektor ostankov.

Prikazani model imenujemo tudi mešani model, ker vsebuje tako sistematske kot naključne vplive. Mešane modele uporabljamo pri napovedovanju genetskih vrednosti, pa tudi pri obdelavi podatkov iz pogojev reje, primerni pa so tudi za primere, kjer se srečujemo s ponovljivostjo itd.

Statistični model lahko vsebuje samo sistematske vplive (enačba 1.13). Takrat pač ne bomo napisali člena **Zu** za naključne vplive. Modeli s samo sistematskimi vplivi so dokaj pogosti. Večino načrtovanih poskusov lahko obdelamo samo s sistematskimi modeli. Pri načrtu poskusov pazimo, da se izognemo morebitnih genetskim vplivom, vplivom skupnega okolja ali permanentnega okolja. Kadar se temu ne moremo izogniti, pa pazimo, da sorodne živali ali živali iz skupnega okolja porazdelimo čimbolj enakomerno po skupinah.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \qquad [1.13]$$

Zelo redko pa imamo v modelu samo naključne vplive. Takrat model vsebuje vsaj srednjo vrednost. Naključni model pa zapišemo lahko na dva načina, kot prikazujeta enačbi 1.14 .

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \qquad [1.14]$$

V enačbi 1.14 vektor $\boldsymbol{\mu}$ predstavlja vektor srednjih vrednosti (enačba 1.15).

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu\} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mu = \mathbf{1}\mu \qquad [1.15]$$

Tako lahko model 1.14 zapišemo tudi tako, kot je prikazano v enačbi 1.16. Vektor **1** je vektor samih enic (enačba 1.15). Včasih so naključne modele uporabili pri analizi varianci. Pred tem so opazovanja očistili sistematskih vplivov.

$$\mathbf{y} = \mathbf{1}\mu + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \qquad [1.16]$$

Seznanimo se najprej z vsebino matrik in vektorjev v modelih. V nadaljevanju bomo obdelali mešani model, ker vsebuje vse elemente, ki so prenosljivi tudi na sistematske in naključne modele.

1.3 Vektorji opazovanj

Vektor opazovanj $\mathbf{y}$ je stolpični vektor, ki ima toliko vrstic, kot smo opravili meritev za opazovano lastnost.

Kot primer bomo obdelali podatke o preizkusu mladic v pogojih reje iz pregl. 1.1. V našem primeru smo za dnevni prirast opravili 11 meritev in jih uvrstili v vektor $\mathbf{y}_1$ (ali $\mathbf{y}_D$), pri debelini hrbtne slanine pa 22. Vrstni red navajanja podatkov je poljuben, vendar pa, ko ga enkrat izberemo, je sistem definiran in ga ne smemo v naslednjih postopkih menjati. Vektorja opazovanj $\mathbf{y}_2$ in $\mathbf{y}_2^*$(oziroma $\mathbf{y}_S$ in $\mathbf{y}_S^*$) za debelino hrbtne slanine vsebujeta iste meritve, vendar razporejene različno. Kljub temu, da vektorja nista enaka, pričakujemo iste rešitve. Razporeditev rešitev pa bo odvisna od vrstnega reda parametrov.

$$
\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 540 \\ 550 \\ 550 \\ 580 \\ 520 \\ 500 \\ 490 \\ 560 \\ 550 \\ 600 \\ 610 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{y}_2^* = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 16 \\ 14 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 12 \\ 20 \\ 17 \\ 24 \\ 24 \\ 27 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \\ 22 \\ 19 \\ 23 \\ 25 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 540 \\ 550 \\ 550 \\ 580 \\ 520 \\ 500 \\ 490 \\ 560 \\ 550 \\ 600 \\ 610 \\ 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 540 \\ 13 \\ 13 \\ 550 \\ 16 \\ 14 \\ 550 \\ 16 \\ 16 \\ 580 \\ 15 \\ 12 \\ 520 \\ 20 \\ 17 \\ 400 \\ 24 \\ 24 \\ 490 \\ 27 \\ 25 \\ 560 \\ 26 \\ 27 \\ 550 \\ 22 \\ 19 \\ 600 \\ 23 \\ 25 \\ 610 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}
\qquad [1.17]
$$

Zadnja dva vektorja $\mathbf{y}$ in $\mathbf{y}^*$vključujeta vse meritve za obe lastnosti in prikazujeta ureditev podatkov v večlastnostnih modelih. Oba vektorja imata natanko 33 opazovanj, razlikujeta pa se le v vrstnem redu opazovanj. V vektorju $\mathbf{y}$ so najprej nanizane prve meritve in nato sledijo druge. V drugem vektorju $\mathbf{y}^*$ pa smo prikazali najprej vse (v danem primeru tri) meritve na prvi živali, nato meritve na drugi itd. Slednji način imamo živinorejci raje, saj so v naših datotekah pogosto podatki iste živali oz. enote v istem zapisu, tudi pri programerjem programske opreme je tak pristop bližji, prvi način pa je bliže teoretični statistiki. Lahko pa v vektor opazovanj $\mathbf{y}$ prihajajo podatki tudi v drugem vrstnem redu, npr. tako kot jih merimo.

1.4 Vektor parametrov za sistematske vplive

Vektorji $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_D$, $\boldsymbol{\beta}_S$ in $\boldsymbol{\beta}$ vključujejo vse parametre za sistematske vplive. Ker sta modela za dnevni prirast (model 1.1) in debelino hrbtne slanine (model 1.2) podobna, je seznam parametrov podoben, le pri slanini je dodana neodvisna spremenljivka masa in odgovarjajoči regresijski koeficient b_i kot parameter.

Vektor parametrov za sistematske vplive pri dnevnem prirastu lahko predstavljata bodisi enačba 1.18 bodisi 1.19.

$$\boldsymbol{\beta}_1' = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} \mu_1 & \vdots & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \vdots & M_{11} & M_{12} & \vdots & F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{array}\right] \qquad [1.18]$$

$$\boldsymbol{\beta}_D' = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} \mu_D & \vdots & P_{D1} & P_{D2} & P_{D3} & \vdots & M_{D1} & M_{D2} & \vdots & F_{D1} & F_{D2} & F_{D3} \end{array}\right] \qquad [1.19]$$

Sedaj pa sestavimo še vektor parametrov za debelino hrbtne slanine. Tudi tu lahko izberemo varianto, ko lastnost označimo s številko (enačba 1.20) ali črko (enačba 1.21). Praviloma se odločimo samo za eno varianto in se je vseskozi tudi držimo.

$$\boldsymbol{\beta}_2' = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \mu_2 & \vdots & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \vdots & M_{21} & M_{22} & \vdots & F_{21} & F_{22} & F_{23} & \vdots & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{array}\right] \qquad [1.20]$$

$$\boldsymbol{\beta}_S' = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \mu_S & \vdots & P_{S1} & P_{S2} & P_{S3} & \vdots & M_{S1} & M_{S2} & \vdots & F_{S1} & F_{S2} & F_{S3} & \vdots & b_{S1} & b_{S2} & b_{S3} \end{array}\right] \qquad [1.21]$$

V večlastnostnih modelih lahko vektor parametrov sestavimo tako, da nanizamo vektorje za posamezne lastnosti drugega za drugim (enačba 1.22).

$$\boldsymbol{\beta}' = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{\beta}_1' & \boldsymbol{\beta}_2' \end{array}\right] \qquad [1.22]$$

Tudi parametre v vektorju $\boldsymbol{\beta}$ lahko razvrstimo poljubno. V enačbi 1.23 smo jih zbrali parametre po nivojih.

$$\boldsymbol{\beta}' = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} \mu_1 & \mu_2 & \vdots & P_{11} & P_{21} & P_{12} & P_{22} & P_{13} & P_{23} & \vdots & \cdots & \vdots & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{array}\right] \qquad [1.23]$$

Parametri niso isti pri različnih lastnostih, saj pričakujemo pri vsaki lastnosti drugačne rešitve (ocene oz. napovedi). Ne glede na to, ali sta modela enaka ali različna, potrebujemo za vsako lastnost druge parametre. Vzemimo za primer samo srednjo vrednost μ. Izračunati moramo dve srednji vrednosti: eno za srednjo vrednost za dnevni prirast μ_D in eno za debelino hrbtne slanine μ_S. Skupen rezultat ne bi imel nobenega pomena, sicer pa tako in tako ne moramo seštevati vrednosti za dnevni prirast (v g/dan) in vrednosti za debelino hrbtne slanine (v mm).

Ponovitve pri debelini slanine smo opravljali le z namenom, da izboljšamo zanesljivost meritev, saj meritev slanine z ultrazvokom ni dovolj zanesljiva. Ponovitve tako ne vplivajo na število parametrov, ki jih želimo oceniti. Seveda pa to velja le za ponovitve, ki jih lahko razglasimo kot paralelke. Meritve slanine na drugem mestu, kjer bi pričakovali povsem drugačne vrednosti, bi lahko obravnavali kot drugo lastnost.

Predvsem zaradi prikaza naključnega dela modela smo modela za dnevni prirast (model 1.3) in debelino hrbtne slanine (model 1.4) tudi razširili. V model smo dodali naključni vpliv za skupno okolje v gnezdu, kar ne spreminja sistematski del modela. Pri debelini slanine smo povezavo med odvisno in neodvisno spremenljivko opisali s polinomom druge stopnje, kar pomeni, da moramo listo parametrov v vektroju β dopolniti (enačba 1.24).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_2' = \Big[& \mu_2 \; \vdots \; P_{21} \; P_{22} \; P_{23} \; \vdots \; M_{21} \; M_{22} \; \vdots \; F_{21} \; F_{22} \; F_{23} \; \vdots \\ & \vdots \; b_{2I1} \; b_{2I2} \; b_{2I3} \; b_{2II1} \; b_{2II2} \; b_{2II3} \Big] \end{aligned} \qquad [1.24]$$

1.5 Vektor parametrov za naključne vplive

Vektorji parametrov za naključne vplive so prisotni samo v mešanih (enačba 1.12) ali naključnih (enačba 1.14) modelih. Parametre za naključne vplive lahko nanizamo v en sam vektor **u**, kot smo to nakazali npr. v enačbi 1.5. Če imamo več naključnih vplivov, kot smo prikazali v modelih 1.3 za dnevni prirast in 1.4 za debelino hrbtne slanine, pa lahko model v naključnem delu tudi razčlenimo. Tako lahko prikažemo posebnost posameznega naključnega vpliva. Navedena modela imata tako dva naključna vpliva: skupno okolje v gnezdu ($\mathbf{g}$, $\mathbf{u}_g$, $\mathbf{u}_1$) in aditivni genetski vpliv ali vpliv živali ($\mathbf{a}$, $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{u}_2$). Pri označevanju vektorjev je sicer kar nekaj svobode, vendar pa morajo biti oznake dobro pojasnjene. Zlasti v večlastnostnih modelih moramo natanko vedeti, kateri indeksi se nanašajo na lastnost in kateri na vpliv. Model lahko tudi zapišemo tako, da naključna vpliva ločeno prikažemo (enačba 1.25).

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t\beta_t + \mathbf{Z}_{tg}\mathbf{g}_t + \mathbf{Z}_{ta}\mathbf{a}_t + \mathbf{e}_t \qquad [1.25]$$

Tako vektor parametrov (enačba 1.26) kot matriko dogodkov (enačba 1.27) za vse naključne vplive lahko sestavimo.

$$\mathbf{u}_t = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{g}_t & \vdots & \mathbf{a}_t \end{array}\right] \qquad [1.26]$$

$$\mathbf{Z}_t = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{tg} & \vdots & \mathbf{Z}_{ta} \end{array}\right] \qquad [1.27]$$

1.5.1 Model živali brez in s sorodstvom

Vzemimo modela 1.1 za dnevni prirast in 1.2 za debelino hrbtne slanine. V vektorjih naključnih vplivov $\mathbf{u}_1$(1.28), $\mathbf{u}_D$(1.29), $\mathbf{u}_2$(1.30), $\mathbf{u}_S$(1.31) in $\mathbf{u}$(1.32) so nanizani parametri za naključne vplive, kot npr. aditivni genetski vpliv, pogosto imenovan kar preprosto “žival”. Lahko pa tudi vektor označimo s črko **a**. Tako smo posamene elemente vektorjev označili kar s črkami *a*, ki nas spominjajo na aditivni genetski vpliv za posamezno žival. Pravilno pa bi tudi bilo, če bi se odločili, da so elementi vektorja označeni s črko **u**, kadar je bolj splošna oznaka za naključni vpliv.

Meritve smo opravili na enajstih živalih, sorodstva pa pri njih nismo poznali. Kadar nimamo porekla, lahko aditivni genetski vpliv (plemensko vrednost) izvrednotimo samo za merjene živali, pri ostalih je plemenska vrednost "pričakovana" in ima vrednost 0. Lasntnost je nakayana s prvim indeksom, žival po vrsti pa z drugim.

$$\mathbf{u}'_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} \end{array}\right] \qquad [1.28]$$

$$\mathbf{u}'_D = \left[\begin{array}{ccccccccccc} a_{D1} & a_{D2} & a_{D3} & a_{D4} & a_{D5} & a_{D6} & a_{D7} & a_{D8} & a_{D9} & a_{D10} & a_{D11} \end{array}\right] \qquad [1.29]$$

$$\mathbf{u}'_2 = \left[\begin{array}{ccccccccccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{210} & a_{211} \end{array}\right] \qquad [1.30]$$

$$\mathbf{u}'_S = \left[\begin{array}{ccccccccccc} a_{S1} & a_{S2} & a_{S3} & a_{S4} & a_{S5} & a_{S6} & a_{S7} & a_{S8} & a_{S9} & a_{S10} & a_{S11} \end{array}\right] \qquad [1.31]$$

Pri večlastnostnih analizah lahko vektorje parametrov nanizamo v vektor drug za drugim (enačba 1.32).

$$\mathbf{u}' = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 \end{array}\right] \qquad [1.32]$$

V primeru, da imamo še dodatne živali iz porekla, za katere bi tudi radi napovedali plemensko vrednost (aditivni genetski vpliv), živali iz porekla dodamo tudi v vektor parametrov za naključni vpliv živali. V primeru porekla B (pregl. 1.2) bomo 4 prednike za živali iz poskusa dodali na konec vektorja 1.28. Prikazali bomo le vektor $\mathbf{u}'_1$(1.33), ostali (enačbe 1.29, 1.30 in 1.31) se prav tako ustrezno podaljšajo za dodane štiri živali. Sestavljeni vektor parametrov za vpliv živali se podaljša za štiri parametre pri vsaki lastnosti. Tako ima skupaj osem elementov več.

$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} & a_{115} \end{bmatrix} \quad [1.33]$$

V poreklu A in B (pregl. 1.2) smo zaradi enostavnosti prikazali poreklo samo za eno generacijo. Praviloma dodajamo več generacij, saj metoda predpostavlja, da vključimo poreklo do izhodiščne, osnovne populacije. V praksi se pogosto izkaže, da zadostujejo tri generacije prednikov. Lahko pa v poreklu nastopajo tudi potomci, ki jim želimo izvrednotiti plemensko vrednost. V poreklu C je dodana še žival 16, ki predstavja stare starše. Torej se vektor parametrov za sistematske vplive še podaljša (enačba 1.34). Plemenske vrednosti dodanih sorodnih živali napovemo s pomočjo bližnih in daljnih sorodnikov.

$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} & \vdots \\ & & & & \vdots & a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} & a_{115} & a_{116} & \end{bmatrix} \quad [1.34]$$

1.5.2 Modeli s skupnim okoljem

Najprej si izpišimo vektor parametrov za naključni del za modela, ki vključujeta skupno okolje v gnezdu za dnevni prirast (enačba 1.3) in debelino hrbtne slanine (enačba 1.4). V modelih imamo dva naključna vpliva, zato lahko nastavimo najprej ločeno vektor parametrov za skupno okolje v gnezdu in vektor parametrov za vpliv živali. Slednjega smo nastavili v poglavju 1.5.1 in bomo ga bomo izbrali glede na poreklo. Kadar imamo več naključnih vplivov, lahko delne vektorje parametrov označimo s črko, ki nas spomni na ime vpliva. Tako vektor parametrov lahko označimo z **a** ali $\mathbf{u}_a$, za skupno okolje v gnezdu pa uporabimo lahko **g**, **l** (angl. *litter*) ali $\mathbf{u}_g$. Za ta namen smo podatkom iz preglednice 1.1 dodali podatke o gnezdu (pregl. 1.3). Skupno okolje v gnezdu določata samica, ki mladice odgoji, in datum poroda samice (ali porod po vrsti). Tako mora biti usklajen s podatki o materi in rojstvu, zato bi morali gnezda določiti za vsako poreklo posebej. Da ohranimo samo nekaj podatkov in pokažemo, da je za ovrednotenje skupnega okolja v gnezdu potrebno imeti več živali po gnezdu, smo si podatke o gnezdu izmislili. Tako ima skupno okolje v gnezdu za katerokoli ($t = 1$ za dnevni prirast in $t = 2$ za debelino hrbtne slanine) lastnost v našem primeru sedem nivojev - sedem gnezd (enačba 1.35), za katere želimo napoved. Če imamo samo eno lastnost, indeks t za lastnost izpustimo.

$$\mathbf{g}_\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} g_{t1} & g_{t2} & g_{t3} & g_{t4} & g_{t5} & g_{t6} & g_{t7} \end{bmatrix} \quad [1.35]$$

Če bi radi, da imamo vse naključne vplive označene z isto črko, potem z dodatno črko (enačba 1.36) ali številko (1.37) v indeksu nedvoumno in enolično označimo vplive. V slednjih enačbah postane indeksiranje že kar preveč sestavljeno in postane stvar lahko nejasna, zato ima enačba 1.35 kar nekaj prednosti. Kadar so v modelu še drugi naključni vplivi, pazimo, da je označevanje konsistentno.

$$\mathbf{u}_{tg}' = \begin{bmatrix} u_{tg1} & u_{tg2} & u_{tg3} & u_{tg4} & u_{tg5} & u_{tg6} & u_{tg7} \end{bmatrix} \quad [1.36]$$

$$\mathbf{u}_{t1}' = \begin{bmatrix} u_{t11} & u_{t12} & u_{t13} & u_{t14} & u_{t15} & u_{t16} & u_{t17} \end{bmatrix} \quad [1.37]$$

Kadar imamo večlastnostno analizo, vektorje parametrov za posamezne lastnosti združimo. Uporabili bomo samo vektorje iz enačbe 1.35. Skupni vektor ima tako 2 x 7 parametrov.

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1' & \mathbf{g}_2' \end{bmatrix} \quad [1.38]$$

Tabela 1.3: Preizkus mladic z skupnim okoljem v gnezdu

Žival	Gnezdo	Pasma	Mesec	Farma	Masa(kg)	DP (g/dan)	DHS(mm)	
1	1	SL	JAN	A	102	540	13	13
2	1	SL	JAN	B	98	550	16	14
3	2	SL	FEB	C	105	550	16	16
4	2	SL	FEB	A	102	580	15	12
5	3	LW	JAN	B	95	520	20	17
6	3	LW	FEB	C	101	500	24	24
7	4	LW	FEB	A	101	490	27	25
8	5	NL	JAN	B	97	560	26	27
9	6	NL	JAN	C	100	550	22	19
10	7	NL	FEB	A	97	600	23	25
11	7	NL	FEB	B	102	610	24	22

Razvrstitev v vektorju $\mathbf{g}'$ je lahko tudi drugačna, npr. pogosto radi prikazujemo parametre združene po nivojih (enačba 1.53) znotraj vpliva.

$$\mathbf{g}' = \left[\begin{array}{ccccccccccc} g_{11} & g_{21} & \vdots & g_{12} & g_{21} & \vdots & g_{13} & g_{23} & \cdots & g_{17} & g_{27} \end{array} \right] \quad [1.39]$$

Pri skupnem okolju predpostavljamo, da niso nivoji korelirani (ali v "sorodu"). Tako ne dodajamo dodatnih nivojev. Za nivoje, kjer ni podatkov, lahko napovemo vrednosti kar na pamet, saj je tudi tu pričakovana vrednost 0.

Pri speciesih z več mladiči v gnezdu (drobnica, prašiči, kunci...) predstavlja skupno okolje za velikost gnezda pri samici okolje, ki ga samica nudi vsem svojim potomcem in ga soustvarja "mikro" okolje v kotcu (npr. ogrevanje kotca, prepih, higiena, dostopnost rejca ...). Lastnosti, ki bi podrobno opisovale to okolje, praviloma ne moremo izmeriti. Predstavljajo pa ga tako imenovane maternalne lastnosti, kot npr. mlečnost pri samicah, obnašanje matere (agresivnost, nerodnost, požrtvovalnost....), pa tudi nekatere železne navade rejca, ki povzročajo razlike med samicami. V statističnih modelih to okolje vključujemo na več načinov. Pogosto ga obravnavamo kar kot skupno okolje v gnezdu in pri tem predpostavimo, da med gnezdi ni genetskih povezav. Če hočemo biti bolj natančni in na še posebej zanima genetska maternalna komponenta, bomo v model vključili maternalni genetski vpliv, kjer bomo upoštevali tudi sorodstvo in korelacijo z direktnim (individualnim) genetskim vplivom. Vpliv skupnega okolja v gnezdu bomo lahko v modelu zadržali. Čeprav je ime isto, pa je pomen skupnega okolja v gnezdu z ali brez maternalnega genetskega vpliva v modelu drug, česar se moramo pri interpretaciji in primerjavi rezultatov iz literature zavedati.

Skupno okolje lahko predstavlja tudi čreda, trop oz. jata ali njihova interakcija z letom ali drugim časovnim obdobjem (čreda x leto, čreda x dan kontrole), lahko skupina živali, ki so naseljene v isti kotec. Živali znotraj skupine so si zaradi skupnega okolja bolj podobne kot živali, ki niso bile držane v skupnem okolju.

Nekoliko drugače je v primeru, ko so meritve na isti živali (ali drugi opazovani enoti) opravljene v različnih časovnih razmikih, včasih tudi v različnem okolju. Meritvam v zaporedju rečemo tudi longitudinalni podatki. Kot primer naj navedemo analizo vzorcev mleka pri posameznih kontrolah, v različnih laktacijah, velikost gnezda pri posameznih kotitvah, tehtanja odraslih živali v različnih časovnih razmikih, lahko pa so to tudi rezultati kemičnih analiz, ko proučujemo zanesljivost metode. Tudi meritve debeline hrbtne slanine, ki bi jih merili pri različnih masah, bi sodile v ta sklop. Meritve niso paralelke. Pri takih meritvah nas zanima ponovljivost, zato v model vključimo dodatni vpliv, ki ocenjuje "skupno okolje", ki je skupno meritvam na eni živali oz. kaki drugi opazovani enoti. Takemu vplivu rečemo **permanentno okolje**. Število nivojev pri takem vplivu je običajno veliko, za vsako žival vsaj eno. V primeru meritev lastnosti mleka pa ločimo dve skupni okolji.

- Najprej je eno okolje, ki je skupno vsem meritvam pri samici (kravi, ovci, kozi...), in ga imenujemo kar permanentno okolje, saj traja vse življenje. Tako vzreja ženskega podmladka in priprava na obdobje razmnoževanja vpliva na plodnost in prirejo mleka skozi celotno življenjsko obdobje.

- Drugi del skupnega okolja pa je vezan na eno laktacijo: meritve znotraj laktacije so bolj primerljive, podobne, kot meritve med laktacijami. Imenujemo ga kar permanentno okolje znotraj laktacije. Nivojev pri tem vplivu pa je celo več: pri vsaki živali za vsako laktacijo eden. Torej jih je za eno žival toliko, kot ima žival laktacij. Vpliv pa pojasnjuje pripravo živali na opazovani reprodukcijski ciklus in/ali laktacijo.

1.6 Matrike dogodkov

Z matrikami dogodkov poskus natanko opišemo. Pri kvalitativnih vplivih z vrednostjo 1 (=da) potrdimo, da je meritev pod vplivom izbranega nivoja, z vrednostjo 0 (=ne) pa pokažemo, da meritev ne prinese nič informacij za izbrani nivo. Zelo poredko pri kvalitativnih vplivih uporabimo druge vrednosti, a se s temi izjemami ne bomo ukvarjali.

Pri kvantitativnih vplivih ocenjujemo regresijske koeficiente. V matriko dogodkov pa vnesemo vrednosti izraza desno od regresijskega koeficienta. Po izvedbi poskusa je poznana tako neodvisna spremenljivka kot konstanta za korekcijo.

1.6.1 Matrike dogodkov za sistematske vplive

Matriko dogodkov za sistematske vplive $\mathbf{X}_1$za dnevni prirast nastavimo tako, da pred matriko nastavimo vektor opazovanj $\mathbf{y}_1$, da si s tem pomagamo pri nastavljanju vrstic. Nad stolpce pa si lahko napišemo vektor parametrov $\boldsymbol{\beta}_1'$. Če parameter, ki označuje stolpec, prisostvuje pri oblikovanju meritve, ki jo v dani vrstici opisujemo, napišemo vrednost 1, v obratnem primeru pa 0.

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\beta}_1' \rightarrow & \left[\begin{array}{c|ccc|cc|ccc} \mu_1 & P_{11} & P_{12} & P_{13} & M_{11} & M_{12} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{array}\right] & \\
\mathbf{y}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 540 \\ 550 \\ 550 \\ 580 \\ 520 \\ 500 \\ 490 \\ 560 \\ 550 \\ 600 \\ 610 \end{bmatrix} &
\left[\begin{array}{c|ccc|cc|ccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right] & \leftarrow \mathbf{X}_1
\end{array}
\quad [1.40]
$$

Enica v prvem stolpcu pomeni, da je prašič 1 z dnevnim prirastom 540 g/dan pripadal opazovani populaciji, zato ga bomo upoštevali pri izračunu

Tudi pri debelini hrbtne slanine ravnamo podobno. Vektor opazovanj napišemo ob strani, parametre za sistematske vplive pa nanizamo v vrstico nad prostorom za matriko dogodkov. Z vrednostjo 1 pokažemo pod katerimi kvalitativnimi vplivi se je izbrana meritev oblikovala. Pri posameznem vplivu lahko izberemo le en razred, pri drugih pa meritev ne sodeluje, kar pokažemo z vrednostjo 0.

Le pri regresijskih koeficientih vpišemo vrednost neodvisne spremenljivke x, pravzaprav celotnega izraza desno od regresijskega koeficienta. Če model tako zahteva, jo korigiramo na konstantno vrednost ali povprečje, potenciramo, uporabimo katero drugo transformacijo. V našem modelu 1.2 za debelino hrbtne slanine moramo izvrednotiti izraz $\left(x_{ijkl} - 100\right)$. Prva žival je tehtala 102 kg (= x_{ijkl}), zato je vrednost izraza +2 kg, kar vnesemo v prvo vrstico pod prvi regresijski koeficient, saj meritev pripada prvi pasmi.

$$\boldsymbol{\beta}_2' \rightarrow \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \mu_2 & \vdots & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \vdots & M_{21} & M_{22} & \vdots & F_{21} & F_{22} & F_{23} & \vdots & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{y}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ \cdots \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & -2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & +5 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & & -5 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & 0 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & & +2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \textit{iste} \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & -2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & +5 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & & -5 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & 0 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & & +2
\end{array}\right] \leftarrow \mathbf{X}_2 \qquad [1.4$$

Uporabimo lahko tudi drugo razvrstitev opazovanj.

$$
\beta_2' \rightarrow \left[\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mu_2 & \vdots & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \vdots & M_{21} & M_{22} & \vdots & F_{21} & F_{22} & F_{23} & \vdots & b_{21} & b_{22} & b_{23}
\end{array}\right]
$$

$$
\mathbf{y}_2^* \rightarrow \left[\begin{array}{c}
13\\13\\16\\14\\16\\16\\15\\12\\20\\17\\24\\24\\27\\25\\26\\27\\22\\19\\23\\25\\24\\22
\end{array}\right]
\quad
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & -2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & -2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & +5 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & +5 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & 1 & & & \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & & \vdots & +2 & & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & & -5 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & 1 & & \vdots & & 1 & & \vdots & & -5 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & +1 & \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & 0 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & 0 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & & -3 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & & +2 \\
1 & \vdots & & & 1 & \vdots & & 1 & \vdots & & 1 & & \vdots & & & +2
\end{array}\right] \leftarrow \mathbf{X}_2 \qquad [1.42]
$$

$$
\beta' \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \beta_1' & \beta_2' \end{array}\right]
$$

$$
\mathbf{y} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{array}\right]_{33x1} \qquad \left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \end{array}\right] \leftarrow \mathbf{X} \qquad [1.43]
$$

1.6.2 Matrika dogodkov za naključne vplive

Nastavimo matriko dogodkov za naključni vpliv živali. V najpreprostejšem primeru (poreklo 0 iz pregl. 1.2)

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{u}_1' \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_1 \rightarrow & \begin{bmatrix} 540 \\ 550 \\ 550 \\ 580 \\ 520 \\ 500 \\ 490 \\ 560 \\ 550 \\ 600 \\ 610 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{Z}_1
\end{array}
\qquad [1.44]
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{u}_2' \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{210} & a_{211} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_2 \rightarrow & \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{Z}_2
\end{array}
\qquad [1.45]
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{u}_2' \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{210} & a_{211} \end{bmatrix} & & \\
\mathbf{y}_2 \rightarrow & \begin{bmatrix} 13\\13\\16\\14\\16\\16\\15\\12\\20\\17\\24\\24\\27\\25\\26\\27\\22\\19\\23\\25\\24\\22 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix} & \leftarrow \mathbf{Z}_2 &
\end{array}
\quad [1.46]
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{u}' \rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1' & \mathbf{u}_2' \end{bmatrix} & \\
\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}_{33x1} & & \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} & \leftarrow \mathbf{Z}
\end{array}
\quad [1.47]
$$

1.7 Matrike varianc in kovarianc

Izpeljimo strukturo varianc in kovarianc za dnevni prirast $\mathbf{y}_1$ (fenotipske variance in kovariance).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 = \quad & var\left(\mathbf{y}_1\right) = \quad var\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1\right) = \\
&= \underbrace{cov\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\, \boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{X}_1'\right)}_{0} + \underbrace{cov\left(\mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1,\, \boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{X}_1'\right)}_{0} + \underbrace{cov\left(\mathbf{e}_1,\, \boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{X}_1'\right)}_{0} + \underbrace{cov\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\, \mathbf{u}_1'\mathbf{Z}_1'\right)}_{0} + \\
& + cov\left(\mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_1'\mathbf{Z}_1'\right) + cov\underbrace{\left(\mathbf{e}_{1,}\mathbf{u}_1'\mathbf{Z}_1'\right)}_{0} + cov\underbrace{\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\, \mathbf{e}_1'\right)}_{0} + cov\underbrace{\left(\mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1,\, \mathbf{e}_1'\right)}_{0} \\
& + cov\left(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_1'\right) \quad = \mathbf{Z}_1 var\left(\mathbf{u}_1\right)\mathbf{Z}_1' + \quad var\left(\mathbf{e}_1\right) \quad = \mathbf{Z}_1\mathbf{G}_1\mathbf{Z}_1' + \mathbf{R}_1
\end{aligned}
\quad [1.48]
$$

Matrika varianc in kovarianc za ostanek (**R**) je pogosto enostavna (1.49) na diagonali so variance za ostanek, nediagonalni elementi, ki predstavljajo kovariance med dvema meritvama, pa so enake nič.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{e}_1' \rightarrow & \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} & e_{19} & e_{110} & e_{111} \end{bmatrix} \\
\mathbf{e}_1 \rightarrow & \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{19} \\ e_{110} \\ e_{111} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
\sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{e_1}
\end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{R}_1 = \mathbf{I}\sigma^2_{e_1} [1.49]
\end{array}
$$

V izjemnem primeru, ko merimo na isti živali samo eno meritev in živali med seboj niso sorodne, je tudi matrika varianc in kovarianc za naključne vplive ($\mathbf{G_1}$) enostavna (1.50). Vedeti pa moramo, da je to prej izjema kot pravilo!

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{u}_1' \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_1 \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \\ a_{17} \\ a_{18} \\ a_{19} \\ a_{110} \\ a_{111} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
\sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{a_1}
\end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{G}_1 = \mathbf{I}\sigma^2_{a_1} [1.50]
\end{array}
$$

V tem izjemnem primeru je tudi matrika fenotipskih varianc in kovarianc **V** diagonalna matrika, posamezni diagonalni elementi pa so vsota okoliške ($\sigma^2_{e_1}$) in genetske ($\sigma^2_{a_1}$) komponente variance.

$$
\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{G}_1\mathbf{Z}_1' + \mathbf{R}_1 = \mathbf{I}\left(\sigma^2_{a_1} + \sigma^2_{e_1}\right) = diag\left\{\sigma^2_{a_1} + \sigma^2_{e_1}\right\} \qquad [1.51]
$$

Za debelino hrbtne slanine imamo dvakrat toliko opazovanj: na vsaki živali po dve. Ker smo merili z istim aparatom, delo je opravljal isti delavec..., so meritve identično porazdeljene (imamo samo eno varianco za ostanek). Vendar pa meritvi na isti živali praviloma nista neodvisni - žival smo pitali pod istimi pogoji, zato je tudi okolje v enaki meri ponagajalo. Če se je žival zaradi tega bolj zredila, kot bi se pod strogimi pogoji testa, bomo namerili tudi debelejšo slanino pri obeh ponovitvah. Med ponovitvama na isti živali torej obstaja podobnost - kovarianca. Oblika matrike varianc in kovarianc za ostanek je odvisna od razporedive meritev v vekorju **y**. Če razvrstimo meritve tako, da najprej nanizamo prve meritve na vseh živalih in nato dodamo še druge meritve (prvi vektor za debelino hrbtne slanine v enačbah (1.7), dobimo matriko iz enačbe (1.30). Ko pa razvrstimo ponovitvi po parih - znotraj živali (drugi vektor za debelino hrbtne slanine v enačbah (1.7)), pa dobimo matriko iz enačbe (1.31) in (1.32).

$$
\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\sigma^2_{e_2} & \mathbf{I}\sigma_{e_{22}} \\ \mathbf{I}\sigma_{e_{22}} & \mathbf{I}\sigma^2_{e_2} \end{bmatrix}_{22x22} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_2} & \sigma_{e_{22}} \\ \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix}_{2x2} \otimes \mathbf{I}_{11} = \mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{I}_{11} \qquad [1.52]
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{e}_2' \rightarrow & \left[\begin{array}{ccccccc:ccccccc} e_{21\,1} & e_{22\,1} & e_{23\,1} & \cdots & e_{29\,1} & e_{2101} & e_{2111} & e_{21\,2} & e_{22\,2} & e_{23\,2} & \cdots & e_{29\,2} & e_{2102} & e_{2112} \end{array}\right] \\
\mathbf{e}_2 \rightarrow & \begin{bmatrix} e_{21\,1} \\ e_{22\,1} \\ e_{23\,1} \\ \vdots \\ e_{29\,1} \\ e_{2101} \\ e_{2111} \\ \cdots \\ e_{21\,2} \\ e_{22\,2} \\ e_{23\,2} \\ \vdots \\ e_{29\,2} \\ e_{2102} \\ e_{2112} \end{bmatrix} &
\left[\begin{array}{ccccccc:ccccccc}
\sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & & & \\
 & \sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & & \\
 & & \sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} & & \\
 & & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} & \\
 & & & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & & & & \sigma_{e_{22}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & & & \\
 & \sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & & \\
 & & \sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2} & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2} & & \\
 & & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2} & \\
 & & & & & & \sigma_{e_{22}} & & & & & & & \sigma^2_{e_2}
\end{array}\right] \leftarrow \mathbf{R}_2
\end{array}
\qquad [1.53]
$$

$$
\mathbf{e}'_2 \rightarrow \begin{bmatrix} e_{211} & e_{212} & \vdots & e_{22\,1} & e_{22\,2} & \vdots & e_{23\,1} & \vdots\, e_{23\,2} & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & e_{29\,1} & e_{29\,2} & \vdots & e_{2101} & e_{2102} & \vdots & e_{2111} & e_{2112} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{e}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} e_{211} \\ e_{212} \\ \cdots\cdots \\ e_{22\,1} \\ e_{22\,2} \\ \cdots\cdots \\ e_{23\,1} \\ e_{23\,2} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ e_{29\,1} \\ e_{29\,2} \\ \cdots\cdots \\ e_{2101} \\ e_{2102} \\ \cdots\cdots \\ e_{2111} \\ e_{2112} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & & \vdots & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & \vdots & \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1} & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1} & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma^2_{e_1} & \sigma_{e_{22}} \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_1}
\end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{R}_2 \qquad [1.54]
$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}_{11} \otimes \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_2} & \sigma_{e_{22}} \\ \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix}_{2x2} = \mathbf{I}_{11} \otimes \mathbf{R}_0 \qquad [1.55]$$

Ker so živali nesorodne, za debelino hrbtne slanine pa želimo samo eno plemensko vrednost, je matrika varianc in kovarianc za direktni aditivni vpliv enostavna, kot jo prikazujemo v (1.56).

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{I}_{11}\sigma^2_{a_2} \qquad [1.56]$$

Sedaj pa izračunajmo še matriko fenotipskih varianc in kovarianc $\mathbf{V}_2$. Vzemimo primer, ko so nanizane najprej prve meritve in nato še ponovitve. Rezultat (1.57) je izjemoma, zaradi že omenjenih predpostavk, blokdiagonalna matrika.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{G}_2\mathbf{Z}'_2 + \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} \\ \mathbf{I}_{11} \end{bmatrix} \mathbf{I}_{11}\sigma^2_{a_2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{11} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{I}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{11} \\ \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{11} \end{bmatrix} \sigma^2_{a_2} + \mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{I}_{11} = \\ = \begin{bmatrix} \sigma^2_{a_2} & \sigma^2_{a_2} \\ \sigma^2_{a_2} & \sigma^2_{a_2} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{11} + \begin{bmatrix} \sigma^2_{e_2} & \sigma_{e_{22}} \\ \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{11} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{a_2} + \sigma^2_{e_2} & \sigma^2_{a_2} + \sigma_{e_{22}} \\ \sigma^2_{a_2} + \sigma_{e_{22}} & \sigma^2_{a_2} + \sigma^2_{e_2} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{11} = \mathbf{V}_0 \otimes \mathbf{I}_{11} \end{aligned} \qquad [1.57]$$

Sedaj pa za vajo ponovimo še izračun kovariance med meritvami za dnevni prirast $\mathbf{y}_1$ in ostanki $\mathbf{e}_1$ ter med meritvami $\mathbf{y}_1$ in slučajnim vplivom $\mathbf{u}_1$.

$$cov\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{e}'_1\right) = cov\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1\right) = \mathbf{Z}_1 cov\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}'_1\right) + var\left(\mathbf{e}_1\right) = \mathbf{R}_1 \qquad [1.58]$$

$$\begin{aligned} cov\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1\right) = cov\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1, \mathbf{u}'_1\right) = cov\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{u}'_1\right) + cov\left(\mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1\right) + cov\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}'_1\right) \\ = \mathbf{Z}_1 cov\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1\right) = \mathbf{Z}_1 var\left(\mathbf{u}_1\right) = \mathbf{Z}_1\mathbf{G}_1 = \mathbf{C}_1 \end{aligned} \qquad [1.59]$$

Pričakovane vrednosti ter variance in kovariance za slučajne vplive so pogosto predstavljene v združeni obliki. V nasednjih enačbah smo prikazali model (1.12) z obema lastnostima.

$$E \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 \end{bmatrix} \qquad [1.60]$$

$$var \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{G}_1\mathbf{Z}'_1 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{Z}_1\mathbf{G}_1\mathbf{Z}'_1 + \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \qquad [1.61]$$

Vajo ponovite še za debelino hrbtne slanine in za model z obema lastnostima skupaj! Potrebovali bomo še rezultate iz naslednje razpredelnice. Pripišite rezultate, da jih ne bomo kasneje iskali! Nato pa sestavite enačbo za pričakovane vrednosti po zgledu (1.58) in prikažite strukturo varianc in kovarianc po zgledu (1.59).

$cov\left(\mathbf{y}_2, \mathbf{e}'_2\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_2, \mathbf{u}'_2\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}, \mathbf{e}'\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}, \mathbf{u}'\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}, \mathbf{e}'_2\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_2\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_2, \mathbf{e}'_1\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_2, \mathbf{u}'_1\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}'_2\right) =$
$cov\left(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}'_1\right) =$

Pri dvolastnostnem modelu splošno obliko enačb še razčlenite, da bodo vidne povezave med lastnostima. Izpopolnite naslednji dve enačbi!

$$E\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

$$var\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}\right]$$

1.8