Kvadratne in bilinearne oblike

Milena Kovač

15. januar 2013

Kvadratne oblike

- z njimi računamo **vsote kvadratov za preizkus hipotez** za sistematske vplive
- ali za **analizo varianc in kovarianc za naključne spremenljivke** v modelu
- splošna oblika:

$$\mathbf{y}'\mathbf{Q}\mathbf{y}$$

kjer pomeni:

$\mathbf{y}$ - vektor opazovanj

$\mathbf{Q}$ - matrika kvadratne oblike

- Matrike kvadratnih oblik so kvadratne in simetrične

Pomni: sled ("trace") = vsoto diagonalnih elementov

Skupna vsota kvadratov

- Skalarna oblika

$$TSS = \sum y_{ij}^2 =$$

- Matrična oblika

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} =$$

- Poiščimo matriko kvadratne oblike

$$= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y}$$

- Matrika kvadratne oblike: $\mathbf{I}$

- Sled matrike $tr\left(\mathbf{I}\right) = n$

Vsota kvadratov za srednjo vrednost

- V skalarni obliki

$$SS\left(\mu\right) = \sum \mu^2 = n\mu^2 =$$

- V matrični obliki:

$$= \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\mu}} =$$

- Izpostavimo μ iz prvega in drugega vektorja

$$= \hat{\mu}'\mathbf{1}'\mathbf{1}\hat{\mu} =$$

- Ker velja $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{y}$:

$$= \left(\mathbf{y}'\mathbf{1}\tfrac{1}{n}\right)\left(\mathbf{1}'\mathbf{1}\right)\left(\tfrac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{y}\right) =$$

Vsota kvadratov za srednjo vrednost II

- Oklepaje izpustimo. Oblika zapisa poudarja simetričnost

$$= \mathbf{y}' \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{y}$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $\left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{1}{n}\right)$

- Vsoto kvadratov za srednjo vrednost dobimo tudi $\frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2 =$

- Nadomestimo $\sum y_i = \mathbf{1}'\mathbf{y}$

$$= \frac{1}{n}\left(\mathbf{y}'\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}'\mathbf{y}\right) = \mathbf{y}'\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{J}\right)\mathbf{y}$$

- Izračunajmo še sled matrike kvadratne oblike

$$tr\left(\frac{1}{n}\mathbf{J}\right) = \frac{1}{n}(1+1+1+...+1) = \frac{1}{n}n = 1$$

Preverimo

- Vrstnega reda matrik oz. vektorjev pri množenju ne smemo menjati!

$$\mathbf{1}\mathbf{1}'$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = n$$

Korigirana skupna vsota kvadratov

$$CTSS = TSS - SS\left(\hat{\mu}\right) =$$

- Zamenjajmo z enačbami

$$= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\left(\tfrac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\tfrac{1}{n}\right)\mathbf{y} =$$

- Izpostavimo $\mathbf{y}'$ spredaj in $\mathbf{y}$ zadaj

$$= \mathbf{y}'\left[\mathbf{I} - \left(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)\right]\mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $\left[\mathbf{I} - \left(\tfrac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\tfrac{1}{n}\right)\right]$

$$= \mathbf{I} - \left(\tfrac{1}{n}\mathbf{1}\left(\overbrace{\mathbf{1}'\mathbf{1}}^{n}\right)\mathbf{1}'\tfrac{1}{n}\right) = \mathbf{I} - \left(\tfrac{1}{n}\overbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}'}^{\mathbf{J}}\right) = \mathbf{I} - \left(\tfrac{1}{n}\mathbf{J}\right)$$

Korigirana skupna vsota kvadratov II

- možna je tudi naslednja oblika

$$CTSS = \mathbf{y}' \left[\mathbf{I} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathsf{n}\mathbf{1}'\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)\right]\mathbf{y} = \mathbf{y}' \left[\mathbf{I} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)\right]\mathbf{y}$$

- sled matrike

$$tr\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)\right) = tr\left(\mathbf{I}\right) - tr\left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right) = n - 1$$

Pomni: sled vsote matrik je vsota sledi matrik

$$tr\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) = tr\left(\mathbf{A}\right) + tr\left(\mathbf{B}\right)$$

Vsota kvadratov za model s sredno vrednostjo

$$MSS = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} =$$

- Upoštevajmo, da je $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Ker velja $\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}$, dobimo

$$= \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}')$

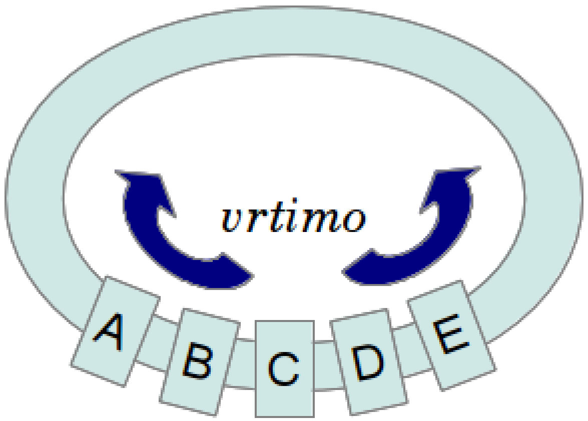
Vsota kvadratov za model s sredno vrednostjo II

- sled matrike $(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}')$

$$tr\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) = tr\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\right) = p$$

$p =$število stopinj prostosti za sistematski del modela, vključno s srednjo vrednostjo

Pomni: pri sledi lahko matrike v produktu vrtimo, če je to mogoče. Tudi v novem zaporedju moramo matrike množiti.



Vsota kvadratov za ostanek

- Poskusimo priti do kvadratne oblike

$$RSS = \hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) =$$

- Transponirajmo prvi vektor

$$= \left(\mathbf{y}' - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\right) \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) =$$

- Pomnožimo

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} =$$

- Srednja dva člena sta enaka, ker sta skalarja

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{2}\mathbf{y}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} =$$

Vsota kvadratov za ostanek - II

- Upoštevajmo, da je $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{2}\mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Poračunajmo zadnja dva člena

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Izpostavimo $\mathbf{y}'$ spredaj in $\mathbf{y}$ zadaj

$$= \mathbf{y}'\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\right)\mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\right)$

- sled matrike $tr\,(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{X}') = tr\,(\mathbf{I}) - tr\,(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{X}') = n - p$

Porazdelitev kvadratnih oblik

$$\chi^2(r(\mathbf{Q}),\, \lambda = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}/2)$$

kjer pomeni:

$\mathbf{X}$	- matrika dogodkov za sistematski del modela
$\boldsymbol{\beta}$	- vektor neznanih parametrov za sistematske vplive
$\mathbf{Q}$	- matrika kvadratne oblike za pojasnjeni del modela
$r\,(\mathbf{Q})$	- rang matrike kvadratne oblike
λ	- parameter necentralnosti

- uporaba pri preizkusu hipotez

λ za ostanek

- zaradi preglednosti, poiščimo 2λ

$$2\lambda=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=$$

- vstavimo kvadratno obliko za ostanek

$$=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\left(\mathbf{I}-\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=$$

- pomnožimo

$$=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=$$

- preuredimo drugi izraz ($\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{X}'\mathbf{X}$)

$$=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

F-test

$$F'\left(f_{\mathbf{A}},\, f_{\mathbf{B}},\, \lambda_{\mathbf{A}}\right) = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}/f_{\mathbf{A}}}{\mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{y}/f_{\mathbf{B}}}$$

kjer pomeni:

$\mathbf{y}$ - vektor opazovanj

$\mathbf{A}$ - matrika kvadratne oblike za pojasnjeni del modela

f_A - število stopinj prostosti za pojasnjeni del modela

$\mathbf{B}$ - matrika kvadratne oblike za nepojasneni del modela (ostanel

f_B - število stopinj prostosti za nepojasneni del modela (ostanek)

Pogoji za statistični test

- Hipoteza mora biti ocenljiva

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right) = \mathbf{K}$$

- Vsote kvadratov morajo imeti χ^2-porazdelitev

  - $\mathbf{y} \backsim N\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta},\, \mathbf{V}\right)$
  - kvadratne oblike morajo biti neodvisne
  - pri kvadratni obliki v imenovalcu mora $\lambda = 0$

Postopek

1. Preverimo ocenljivost hipotez

2. Proučimo distribucije odvisnih ($\mathbf{y}$) in neodvisdnih ($\mathbf{u}$) naključnih spremenljivk in ostanka ($\mathbf{e}$)

3. Preverimo, če je produkt kvadratne oblike $\mathbf{Q}$ in matrike fenotipskih varianc $\mathbf{V}$ idempotenten
   $\mathbf{QVQV} = \mathbf{QV}$

4. Ugotovimo rang matrike kvadratne oblike $\mathbf{Q}$
   $r\left(\mathbf{Q}\right) = tr\left(\mathbf{Q}\right)$

5. Izračunajmo $\lambda = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}/2$

Idempotentna matrika

- Matrika $\mathbf{M}$ je idempotentna, če velja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}$$

- Pri idempotentnih matrike velja:

  - Produkt idempotentne matrike $\mathbf{M}$ in matrike dogodkov $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

  - Rang idempotentne matrike $\mathbf{M}$ je enak sledi matrike (*trace*)

$$rank(\mathbf{M}) = tr(\mathbf{M})$$

Idempotentne matrike - primeri

- matrika kvadratne matrike za skupno vsoto

$$(\mathbf{I})^2 = \mathbf{I}$$

- matrika kvadratne matrike za ostanek

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right)^2 =$$

- napišimo v obliki produktov

$$= \left(\mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) =$$

- pomnožimo oklepaja

$$= \mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' +$$
$$+ \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' =$$

- srednja člena sta enaka,
  v zadnjem pa uporabimo $\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}$

$$= \mathbf{I} - \mathbf{2X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' + \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' =$$

- sedaj lahko seštejemo še zadnja dva člena

$$= \mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'$$

Idempotentne matrike - primeri II

- matrika kvadratne matrike za skupno vsoto

$$\left(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{I}$$

- matrika kvadratne matrike za ostanek

$$\left[\left(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right)\mathbf{V}\right]^{2} =$$

- napišimo v obliki produktov

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) =$$

- pomnožimo oklepaja

$$= \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' -$$

$$-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' +$$

$$+\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' =$$

- člena v drugi vrsticu sta enaka,
  v zadnjem pa uporabimo
  $\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}$

$$= \mathbf{I} - 2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' =$$

- sedaj lahko seštejemo še zadnja dva člena

$$= \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' = \left(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right)\mathbf{V}$$

Sled matrike

Definicija: sled matrike je vsota diagonalnih elementov kvadratne matrike.

$$tr\left(\mathbf{A}\right) = \sum a_{ii}$$

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right) \searrow \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)$$

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right) = 11 + 4 + 3 + 4 = 22$$

$$tr\left(\mathbf{A}\right) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$$

Sled matrike (nadalj.)

$$tr\left(\mathbf{A}'\right) = tr\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;\ \text{diagonala je ostala ista}$$

$$tr\left(\mathbf{A}'\right) = tr\left(\mathbf{A}\right)$$

- Sled transponirane matrike je enaka sledi matrike A

- Sled skalarja je skalar

$$tr\left(n\right) = n$$

- Kadar matrike lahko množimo, jih lahko zavrtimo

$$tr\left(ABC\right) = tr\left(CAB\right) = tr\left(BCA\right)$$

Sled matrike - primeri

- za skupno vsoto kvadratov = število opazovanj

$$tr\left(\mathbf{I}\right) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

- za vsoto kvadratov za model = število stopinj prostosti za model

$$tr\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) = tr\left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\right) = p$$

- za vsoto kvadratov za srednjo vrednost = 1

$$tr\left(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 tr\left(\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 tr\left(\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\right) =$$
$$= \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \; tr(\underbrace{\mathbf{1}'\mathbf{1}}_{n}\;\underbrace{\mathbf{1}'\mathbf{1}}_{n}) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 tr\left(n^2\right) = 1$$

- za ostanek

$$tr\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) = tr\left(\mathbf{I}\right) - tr\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\right) = n - p$$

Vaja

- Poiščite kvadratno obliko in sled za naslednje vsote kvadratov!

- Je matrika kvadratne oblike idempotentna?

- Kako je vsota kvadratov porazdeljena?

$$\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2$$

Bilinearna oblika

- imamo dve naključni spremenljivki (lastnosti)

$$\mathbf{y} \sim (\mathbf{X}_y \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{y}}, \mathbf{V}_{\mathbf{y}}); \mathbf{z} \sim (\mathbf{X}_z \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{z}}, \mathbf{V}_{\mathbf{z}});$$

- med njima obstaja podobnost, ki jo opišemo s kovarianco
  - skalarna oblika
    $cov\left(y_{ij},\, z_{ij}\right) = \sigma_{yz} = \frac{\sum y_{ij} z_{ij}}{n-p} - \frac{\sum y_{ij} \sum z_{ij}}{(n-p)\ n} =$
    $= E\left(y_{ij} z_{ij}\right) - E\left(y_{ij}\right) E\left(z_{ij}\right)$
  - matrična oblika
    $cov\left(\mathbf{y}, \mathbf{z}'\right) = \mathbf{V}_{yz} = E\left(\mathbf{y}\mathbf{z}'\right) - E\left(\mathbf{y}\right) E\left(\mathbf{z}'\right)$

- matrika $\mathbf{V}_{yz}$ je kvadratna

- bilinearna oblika = vsota produktov dveh spremenljivk

$$\mathbf{y}'\mathbf{C}\mathbf{z}$$

Linearni statistični modeli z nepolnim rangom

- Statistični model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$
$$\mathbf{e} \sim \left(\mathbf{0},\, \mathbf{I}\sigma^{\mathbf{2}}\right)$$

- sistem normalnih enačb

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{y}$$

- rešitve sistema (niso ocene parametrov, ki so navedeni v izpisih)

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{o}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{y}$$

- vsote kvadratov morajo biti neodvisne (invariantne) od rešitev, torej vedno enake

Delitev vsote kvadratov

- Določimo vsote kvadratov

$$\begin{aligned} TSS &= \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \\ MSS &= \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \\ RSS &= \mathbf{y}'\left[\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]\mathbf{y} \end{aligned}$$

- Nikjer nimamo parametrov iz vektorja $\boldsymbol{\beta}$

- Njihove pričakovane vrednosti (postopek kasneje)

$$\begin{aligned} E\left(RSS\right) &= E\left(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\right) - E\left(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\right) \\ &= n\widehat{\sigma^2} - p\widehat{\sigma^2} \\ &= \left(n-p\right)\widehat{\sigma^2} \end{aligned}$$

Delitev vsote kvadratov (nadalj.)

- Izenačimo vsoto kvadratov z njihovo pričakovano vrednostjo

$$\mathbf{y}'\left[\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]\mathbf{y}=(n-p)\,\widehat{\sigma^2}$$

- tu je neznanka $\widehat{\sigma^2}$

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-p}\mathbf{y}'\left[\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]\mathbf{y}$$

- dobimo srednji kvadrat za ostanek

- podobno ravnamo z drugimi naključnimi spremenljivkami (vplivi)

Splošne hipoteze - TIP III in IV

- Metoda splošnih linearnih hipotez za metodo najmanjših kvadratov:
  - Napišemo ocenljive hipoteze
  - Poiščemo njihove vsote kvadratov
  - Izračunamo srednji kvadrat in
  - $F-$vrednost
  - Določimo $p-$vrednost
- Postopek je isti, kot pri tipu I in tipu II
- Zahtevnejša je postavitev hipotez (prikaz sledi) ...

Hipoteze za vplive z razredi (nepolni rang)

- ničelna in alternativna hipoteza

$$H_0 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$

$$H_1 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{m}$$

- vsota kvadratov za hipotezo

$$SS(H) = \left(\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m}\right)' \left[\mathbf{K}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{K}' + \right.$$

$$\left. + \mathbf{K}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}_i\left(\mathbf{X}_i'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{X}_i\right)^{-1}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{K}'\right]^{-1}\left(\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m}\right)$$

kjer pomeni:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-}\mathbf{X}' = \mathbf{M}' = \mathbf{M}^2 \text{ in } \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Hipoteza za (kvantitativne) vplive s polnim rangom

- ničelna in alternativna hipoteza

$$H_0 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$
$$H_1 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{m}$$

- vsota kvadratov za hipotezo

$$SS(H) = \left(\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m}\right)' \left[\mathbf{K}(\mathbf{X_i'M'MX_i})^{-1}\mathbf{K}'\right]^{-1} \left(\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m}\right)$$

- vsote kvadratov so kompleksne in jo bomo prepustili statističnim paketom