

Kvadratne in bilinearne oblike

Milena Kovač

15. januar 2013

Kvadratne oblike

- z njimi računamo **vsote kvadratov za preizkus hipotez** za sistematske vplive
- ali za **analizo varianc in kovarianc za naključne spremenljivke** v modelu
- splošna oblika:

$$y'Qy$$

kjer pomeni:

y - vektor opazovanj

Q - matrika kvadratne oblike

- Matrike kvadratnih oblik so kvadratne in simetrične

Pomni: sled ("trace") = vsoto diagonalnih elementov

Skupna vsota kvadratov

- Skalarna oblika

$$TSS = \sum y_{ij}^2 =$$

- Matrična oblika

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} =$$

- Poiščimo matriko kvadratne oblike

$$= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y}$$

- Matrika kvadratne oblike: \mathbf{I}

- Sled matrike $tr(\mathbf{I}) = n$

Vsota kvadratov za srednjo vrednost

- V skalarni obliki

$$SS(\mu) = \sum \mu^2 = n\mu^2 =$$

- V matrični obliki:

$$= \hat{\mu}'\hat{\mu} =$$

- Izpostavimo μ iz prvega in drugega vektorja

$$= \hat{\mu}'\mathbf{1}'\mathbf{1}\hat{\mu} =$$

- Ker velja $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum y_i = \frac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{y}$:

$$= \left(\mathbf{y}'\mathbf{1}\frac{1}{n}\right) (\mathbf{1}'\mathbf{1}) \left(\frac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{y}\right) =$$

Vsota kvadratov za srednjo vrednost II

- Oklepaje izpustimo. Oblika zapisa poudarja simetričnost

$$= \mathbf{y}' \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{1} \mathbf{1}' \frac{1}{n} \right) \mathbf{y}$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $\left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{1} \mathbf{1}' \frac{1}{n} \right)$

- Vsoto kvadratov za srednjo vrednost dobimo tudi $\frac{1}{n} \left(\sum y_i \right)^2 =$

- Nadomestimo $\sum y_i = \mathbf{1}' \mathbf{y}$

$$= \frac{1}{n} (\mathbf{y}' \mathbf{1}) (\mathbf{1}' \mathbf{y}) = \mathbf{y}' \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{y} = \mathbf{y}' \left(\frac{1}{n} \mathbf{J} \right) \mathbf{y}$$

- Izračunajmo še sled matrike kvadratne oblike

$$tr \left(\frac{1}{n} \mathbf{J} \right) = \frac{1}{n} (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{1}{n} n = 1$$

Preverimo

- Vrstnega reda matrik oz. vektorjev pri množenju ne smemo menjati!

$$\mathbf{1}\mathbf{1}' \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Preverimo

- Vrstnega reda matrik oz. vektorjev pri množenju ne smemo menjati!

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1}\mathbf{1}' \\
 \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 = \mathbf{J}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1}'\mathbf{1} \\
 \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Preverimo

- Vrstnega reda matrik oz. vektorjev pri množenju ne smemo menjati!

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1}\mathbf{1}' \\
 \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 = \mathbf{J}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1}'\mathbf{1} \\
 \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Korigirana skupna vsota kvadratov

$$CTSS = TSS - SS(\hat{\mu}) =$$

- Zamenjajmo z enačbami

$$= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{1}{n}\right)\mathbf{y} =$$

- Izpostavimo \mathbf{y}' spredaj in \mathbf{y} zadaj

$$= \mathbf{y}'\left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{1}{n}\right)\right]\mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $\left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{1}{n}\right)\right]$

$$= \mathbf{I} - \left(\frac{1}{n}\mathbf{1} \overbrace{\left(\mathbf{1}'\mathbf{1}\right)}^n \mathbf{1}'\frac{1}{n}\right) = \mathbf{I} - \left(\frac{1}{n} \overbrace{\left(\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)}^{\mathbf{J}}\right) = \mathbf{I} - \left(\frac{1}{n}\mathbf{J}\right)$$

Korigirana skupna vsota kvadratov II

- možna je tudi naslednja oblika

$$CTSS = \mathbf{y}' \left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} n \mathbf{1}' \frac{1}{n} \right) \right] \mathbf{y} = \mathbf{y}' \left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right) \right] \mathbf{y}$$

- sled matrike

$$tr \left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right) \right) = tr (\mathbf{I}) - tr \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right) = n - 1$$

Pomni: sled vsote matrik je vsota sledi matrik

$$tr (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr (\mathbf{A}) + tr (\mathbf{B})$$

Vsota kvadratov za model s sredno vrednostjo

$$MSS = \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\beta} =$$

- Upoštevajmo, da je $\hat{\beta} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}$

$$= \mathbf{y}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y} =$$

- Ker velja $(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}$, dobimo

$$= \mathbf{y}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $(\mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')$

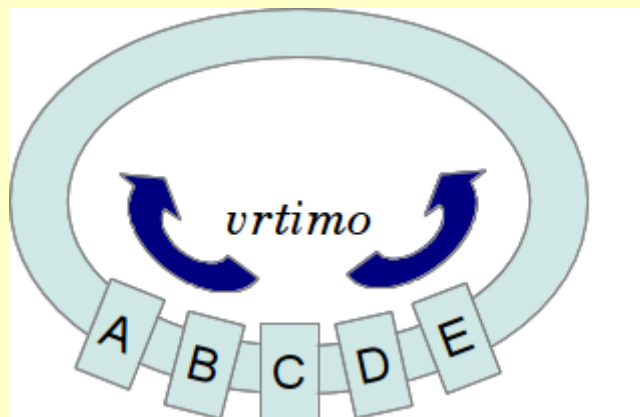
Vsota kvadratov za model s sredno vrednostjo II

- sled matrike ($\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$)

$$tr \left(\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \right) = tr \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right) = p$$

p =število stopinj prostosti za sistematski del modela, vključno s srednjo vrednostjo

Pomni: pri sledi lahko matrike v produktu vrtimo, če je to mogoče. Tudi v novem zaporedju moramo matrike množiti.



Vsota kvadratov za ostanek

- Poskusimo priti do kvadratne oblike

$$RSS = \hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) =$$

- Transponirajmo prvi vektor

$$= \left(\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \right) \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) =$$

- Pomnožimo

$$= \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} =$$

- Srednja dva člena sta enaka, ker sta skalarja

$$= \mathbf{y}' \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} =$$

Vsota kvadratov za ostanek - II

- Upoštevajmo, da je $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Poračunajmo zadnja dva člena

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

- Izpostavimo \mathbf{y}' spredaj in \mathbf{y} zadaj

$$= \mathbf{y}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \mathbf{y} =$$

- Matrika kvadratne oblike (*quadratic form*): $(\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')$

- sled matrike $tr (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') = tr (\mathbf{I}) - tr (\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') = n - p$

Porazdelitev kvadratnih oblik

$$\chi^2(r(\mathbf{Q}), \lambda = \beta' \mathbf{X}' \mathbf{Q} \mathbf{X} \beta / 2)$$

kjer pomeni:

- \mathbf{X} - matrika dogodkov za sistematski del modela
- β - vektor neznanih parametrov za sistematske vplive
- \mathbf{Q} - matrika kvadratne oblike za pojasnjeni del modela
- $r(\mathbf{Q})$ - rang matrike kvadratne oblike
- λ - parameter necentralnosti

- uporaba pri preizkusu hipotez

λ za ostanek

- zaradi preglednosti, poiščimo 2λ

$$2\lambda = \beta' \mathbf{X}' \mathbf{Q} \mathbf{X} \beta =$$

- vstavimo kvadratno obliko za ostanek

$$= \beta' \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \mathbf{X} \beta =$$

- pomnožimo

$$= \beta' \mathbf{X}' \mathbf{I} \mathbf{X} \beta - \beta' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} \beta =$$

- preuredimo drugi izraz ($\mathbf{X}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} = \mathbf{X}' \mathbf{X}$)

$$= \beta' \mathbf{X}' \mathbf{X} \beta - \beta' \mathbf{X}' \mathbf{X} \beta = \mathbf{0}$$

F-test

$$F' (f_A, f_B, \lambda_A) = \frac{y' \mathbf{A} y / f_A}{y' \mathbf{B} y / f_B}$$

kjer pomeni:

\mathbf{y} - vektor opazovanj

\mathbf{A} - matrika kvadratne oblike za pojasnjeni del modela

f_A - število stopinj prostosti za pojasnjeni del modela

\mathbf{B} - matrika kvadratne oblike za nepojasneni del modela (ostanek)

f_B - število stopinj prostosti za nepojasneni del modela (ostanek)

Pogoji za statistični test

- Hipoteza mora biti ocenljiva

$$\mathbf{K} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}) = \mathbf{K}$$

- Vsote kvadratov morajo imeti χ^2 –porazdelitev
 - $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V})$
 - kvadratne oblike morajo biti neodvisne
 - pri kvadratni obliki v imenovalcu mora $\lambda = 0$

Postopek

1. Preverimo ocenljivost hipotez
2. Proučimo distribucije odvisnih (\mathbf{y}) in neodvisnih (\mathbf{u}) naključnih spremenljivk in ostanka (\mathbf{e})
3. Preverimo, če je produkt kvadratne oblike \mathbf{Q} in matrike fenotipskih varianc \mathbf{V} idempotenten
$$\mathbf{QVQV} = \mathbf{QV}$$
4. Ugotovimo rang matrike kvadratne oblike \mathbf{Q}
$$r(\mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{Q})$$
5. Izračunajmo $\lambda = \beta' \mathbf{X}' \mathbf{Q} \mathbf{X} \beta / 2$

Idempotentna matrika

- Matrika \mathbf{M} je idempotentna, če velja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}$$

- Pri idempotentnih matrike velja:
 - Produkt idempotentne matrike \mathbf{M} in matrike dogodkov \mathbf{X} :

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

- Rang idempotentne matrike \mathbf{M} je enak sledi matrike (*trace*)

$$\mathit{rank}(\mathbf{M}) = \mathit{tr}(\mathbf{M})$$

Idempotentne matrice - primeri

- matrika kvadratne matrice za skupno vsoto

$$(\mathbf{I})^2 = \mathbf{I}$$

- matrika kvadratne matrice za ostanek

$$(\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')^2 =$$

- napišimo v obliki produktov

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') =$$

- pomnožimo oklepaja

$$= \mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' + \\ + \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' =$$

- srednja členu sta enaka,
v zadnjem pa uporabimo $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

$$= \mathbf{I} - 2\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' + \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' =$$

- sedaj lahko seštejemo še zadnja dva členu

$$= \mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$$

Idempotentne matrice - primeri II

- matrika kvadratne matrice za skupno vsoto

$$(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})^2 = \mathbf{I}$$

- matrika kvadratne matrice za ostanek

$$\left[\left(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \right) \mathbf{V} \right]^2 =$$

- napišimo v obliki produktov

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \right) =$$

- pomnožimo oklepaja

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' - \\
&\quad - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' + \\
&\quad + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' =
\end{aligned}$$

- člena v drugi vrstici sta enaka,
v zadnjem pa uporabimo

$$(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \mathbf{I} - 2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' =$$

- sedaj lahko seštejemo še zadnja dva člena

$$= \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' = \left(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \right) \mathbf{V}$$

Sled matrike

Definicija: sled matrike je vsota diagonalnih elementov kvadratne matrike.

$$tr(\mathbf{A}) = \sum a_{ii}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X}) \quad \searrow \quad \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 11 + 4 + 3 + 4 = 22$$

$$tr(\mathbf{A}) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$$

Sled matrike (nadalj.)

$$tr(\mathbf{A}') = tr \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3; \text{ diagonalna je ostala ista}$$

$$tr(\mathbf{A}') = tr(\mathbf{A})$$

- Sled transponirane matrike je enaka sledi matrike A
- Sled skalarja je skalar

$$tr(n) = n$$

- Kadar matrike lahko množimo, jih lahko zavrtimo

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$$

Sled matrike - primeri

- za skupno vsoto kvadratov = število opazovanj

$$tr(\mathbf{I}) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

- za vsoto kvadratov za model = število stopinj prostosti za model

$$tr\left(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right) = tr\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right) = p$$

- za vsoto kvadratov za srednjo vrednost = 1

$$\begin{aligned} tr\left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 tr(\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}') = \left(\frac{1}{n}\right)^2 tr(\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1}') = \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 tr\left(\underbrace{\mathbf{1}'\mathbf{1}}_n \underbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}'}_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 tr(n^2) = 1 \end{aligned}$$

- za ostanek

$$tr\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right) = tr(\mathbf{I}) - tr\left(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right) = n - p$$

Vaja

- Poiščite kvadratno obliko in sled za naslednje vsote kvadratov!
- Je matrika kvadratne oblike idempotentna?
- Kako je vsota kvadratov porazdeljena?

$$\sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2$$

Bilinearna oblika

- imamo dve naključni spremenljivki (lastnosti)

$$\mathbf{y} \sim (\mathbf{X}_y \boldsymbol{\beta}_y, \mathbf{V}_y); \mathbf{z} \sim (\mathbf{X}_z \boldsymbol{\beta}_z, \mathbf{V}_z);$$

- med njima obstaja podobnost, ki jo opišemo s kovarianco

- skalarna oblika

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ij}, z_{ij}) &= \sigma_{yz} = \frac{\sum y_{ij} z_{ij}}{n-p} - \frac{\sum y_{ij}}{(n-p)} \frac{\sum z_{ij}}{n} = \\ &= E(y_{ij} z_{ij}) - E(y_{ij}) E(z_{ij}) \end{aligned}$$

- matrična oblika

$$\text{cov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}') = \mathbf{V}_{yz} = E(\mathbf{y}\mathbf{z}') - E(\mathbf{y}) E(\mathbf{z}')$$

- matrika \mathbf{V}_{yz} je kvadratna

- **bilinearna oblika** = vsota produktov dveh spremenljivk

$$\mathbf{y}' \mathbf{C} \mathbf{z}$$

Linearni statistični modeli z nepolnim rangom

- Statistični model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$
$$\mathbf{e} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$$

- sistem normalnih enačb

$$(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

- rešitve sistema (niso ocene parametrov, ki so navedeni v izpisih)

$$\boldsymbol{\beta}^o = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

- vsote kvadratov morajo biti neodvisne (invariantne) od rešitev, torej vedno enake

Delitev vsote kvadratov

- Določimo vsote kvadratov

$$TSS = \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

$$MSS = \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

$$RSS = \mathbf{y}' \left[\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \right] \mathbf{y}$$

- Nikjer nimamo parametrov iz vektorja β
- Njihove pričakovane vrednosti (postopek kasneje)

$$\begin{aligned} E(RSS) &= E(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}) - E\left(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\right) \\ &= n\hat{\sigma}^2 - p\hat{\sigma}^2 \\ &= (n - p)\hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

Delitev vsote kvadratov (nadalj.)

- Izenačimo vsoto kvadratov z njihovo pričakovano vrednostjo

$$\mathbf{y}' \left[\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \right] \mathbf{y} = (n - p) \hat{\sigma}^2$$

- tu je neznanka $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{y}' \left[\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \right] \mathbf{y}$$

- dobimo **srednji kvadrat** za ostanek
- podobno ravnamo z drugimi naključnimi spremenljivkami (vplivi)

Splošne hipoteze - TIP III in IV

- Metoda splošnih linearnih hipotez za metodo najmanjših kvadratov:
 - Napišemo ocenljive hipoteze
 - Poiščemo njihove vsote kvadratov
 - Izračunamo srednji kvadrat in
 - F –vrednost
 - Določimo p –vrednost
- Postopek je isti, kot pri tipu I in tipu II
- Zahtevnejša je postavitvev hipotez (prikaz sledi) ...

Hipoteze za vplive z razredi (nepolni rang)

- ničelna in alternativna hipoteza

$$H_0 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$

$$H_1 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{m}$$

- vsota kvadratov za hipotezo

$$SS(H) = \left(\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m} \right)' \left[\mathbf{K} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{K}' + \right. \\ \left. + \mathbf{K} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X}_i (\mathbf{X}'_i \mathbf{M}' \mathbf{M} \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}'_i \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{K}' \right]^{-1} \left(\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m} \right)$$

kjer pomeni:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' = \mathbf{M}' = \mathbf{M}^2 \text{ in } \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Hipoteza za (kvantitativne) vplive s polnim rangom

- ničelna in alternativna hipoteza

$$H_0 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$

$$H_1 : \mathbf{K}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{m}$$

- vsota kvadratov za hipotezo

$$SS(H) = \left(\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m} \right)' \left[\mathbf{K}(\mathbf{X}_i' \mathbf{M}' \mathbf{M} \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{K}' \right]^{-1} \left(\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m} \right)$$

- vsote kvadratov so kompleksne in jo bomo prepustili statističnim paketom