# Model v matrični obliki

# a) enačba modela

# - enolastnostni modeli

Milena Kovač

28. oktober 2019

## ... Nomenklatura ...

**Skalarji:** tako kot doslej, male tiskane, neodebeljene

**Vektorji:** male tiskane, odebeljene črke ($\mathbf{y}$) ali podčrtamo ($\underset{\sim}{y}$)

**Stolpični vektorji:** $\mathbf{y}_{nx1}$, $\boldsymbol{\beta}_{px1}$, $\mathbf{u}_{qx1}$

**Vrstični vektorji:** $\mathbf{y}'_{1xn}$, $\boldsymbol{\beta}'_{1xp}$, $\mathbf{u}'_{1xq}$ ali $\mathbf{y}^T$, $\boldsymbol{\beta}^T$, $\mathbf{u}^T$

**Matrike:** velike tiskane, odebeljene črke ($\mathbf{X}_{nxp}$) ali podčrtamo ($\underset{\sim}{X}$)

**Red oz. razsežnost matrike oz. vektorja:**

- $\mathbf{A}_{vrsticaxstolpec}$, $\mathbf{X}_{nxp}$, $\mathbf{y}_{nx1}$, $\mathbf{y}'_{1xn}$
- pri vektorjih lahko tudi izpustimo 1, ker smo določili vrstični oz. stolpični vektor z dogovorom - $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}'_n$

# Preizkus mladic - meritve

| Žival | Gn. | Pasma | Mesec | Reja | Masa (kg) | DP (g/dan) | DHS (mm) | | DSS (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | SL | JAN | A | 102 | 640 | 13 | 13 | 14 |
| 2 | 2 | SL | JAN | B | 98 | 650 | 16 | 14 | 17 |
| 3 | 1 | SL | FEB | C | 105 | 650 | 16 | 16 | 15 |
| 4 | 2 | SL | FEB | A | 102 | 680 | 15 | 12 | 13 |
| 5 | 4 | SVB | JAN | B | 95 | 620 | 20 | 17 | 22 |
| 6 | 5 | SVB | FEB | C | 101 | 600 | 24 | 24 | 27 |
| 7 | 4 | SVB | FEB | A | 101 | 590 | 27 | 25 | 29 |
| 8 | 5 | SML | JAN | B | 97 | 660 | 26 | 27 | 25 |
| 9 | 4 | SML | JAN | C | 100 | 650 | 22 | 19 | 24 |
| 10 | 6 | SML | FEB | A | 97 | 700 | 23 | 25 | 24 |
| 11 | 7 | SML | FEB | B | 102 | 710 | 24 | 22 | 26 |

# Preizkus mladic - poreklo

- Poreklo:
  - Prvi dve živali sta potomki matere 12,
  - tretja je potomka matere 13,
  - oče prvih treh je 14
  - ostale živali so nesorodne
- Zapomnimo si: v preizkusu imamo
  - 11 merjenih živali
  - 14 živalim želimo napovedati plemensko vrednost

# Skalarna in matrična enačba modela

- Enačba modela za dnevni prirast v skalarni obliki

$$
\begin{array}{ccccc}
y_{ijkl} = & \mu + P_i + M_j + F_k & + a_{ijkl} & + e_{ijkl} \\
\Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\
\mathbf{y} = & \mathbf{X}\beta & + \mathbf{Za} & + \mathbf{e}
\end{array}
$$

- Primer v skalarni obliki:

$$
\begin{array}{rll}
640 = & \mu + 1P_1 + 0P_2 + 0P_3 + 1M_1 + 0M_2 + 1F_1 + 0F_2 + 0F_3 & + \\
+ & 1a_{1111} + 0a_{1121} + 0a_{1231} + \cdots & + e_{1111} \\
 & \Downarrow & \Downarrow \\
 & 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 + \cdots & e_1
\end{array}
$$

- V matrikah: opazovanja, nivoje pri naključnih vplivih in napake lahko oštevilčimo zaporedno, da je krajše

# Enačba modela v matrični obliki

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$$

kjer pomeni:

$\mathbf{y}$ - vektor opazovanj za dnevni prirast

$\beta$ - vektor parametrov za sistematske vplive

$\mathbf{u}$ - vektor parametrov za naključne vplive

$\mathbf{X}$ - matrika dogodkov za sistematske vplive

$\mathbf{Z}$ - matrika dogodkov za naključne vplive

$\mathbf{e}$ - vektor ostankov; $\mathbf{e} = \{e_{ijkl}\}$

# Vektor opazovanj za dnevni prirast

$$\mathbf{y} = \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ \vdots \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix}$$

vse meritve
razvrstimo
v stolpični vektor

# Vektor neznanih parametrov za sistematske vplive

$$\beta' = \underset{\sim}{\beta}' = \left[\ \mu \ \vdots \ P_1 \ \ P_2 \ \ P_3 \ \vdots \ M_1 \ \ M_2 \ \vdots \ F_1 \ \ F_2 \ \ F_3\ \right]$$

- V tem modelu so sistematski vplivi samo kvalitativni (z razredi)
- Vektor vsebuje srednjo vrednost in vse parametre za sistematske vplive
- Indeksi označujejo nivoje posameznih vplivov
  - pasma ($i = 1, 2, 3$) in farma ($k = 1, 2, 3$) imata po tri nivoje
  - mesec dva nivoja ($j = 1, 2$)
- V vektorjih / matrikah lahko nakažemo posamezne skupine

## Matrika dogodkov za sistematske vplive

$$\begin{array}{cccc}
 & \beta' \rightarrow & \left[\; \mu \;\vdots\; P_1 \;\; P_2 \;\; P_3 \;\vdots\; M_1 \;\; M_2 \;\vdots\; F_1 \;\; F_2 \;\; F_3 \;\right] & \\
\mathbf{y} \rightarrow & \begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} & \leftarrow \mathbf{X}
\end{array}$$

- Opiše pogoje, v katerih se je dogodek zgodil

# Matrika dogodkov za sistematske vplive

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \mu & \vdots & P_1 & P_2 & P_3 & \vdots & M_1 & M_2 & \vdots & F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

**Vprašanje:** Ali podatek $y_{ijkl}$ pripada parametru (razredu) na vrhu stolpca

**Odgovorite:** DA (=1) ali NE (=0)

## Matrika dogodkov za sistematske vplive

$$
\begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \mu & \vdots & P_1 & P_2 & P_3 & \vdots & M_1 & M_2 & \vdots & F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matrike in vektorje vedno označite in poimenujte
- Če izpustimo vrednost, je vrednost 0, vrstice in stolpci morajo biti poravnani

# Matrika dogodkov za sistematske vplive

$$\begin{bmatrix}640\\650\\650\\680\\620\\600\\590\\660\\650\\700\\710\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c}\begin{bmatrix} \mu & \vdots & P_1 & P_2 & P_3 & \vdots & M_1 & M_2 & \vdots & F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0\\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1\\
1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1\\
1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1\\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\
1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}\end{array}$$

- Naredili smo **napako** v deveti vrstici
- Vplivi morajo biti vedno znani

# Vektor neznanih parametrov za naključne vplive

$$\mathbf{u}' = \{u_{ijkl}\}$$

- Vektor vsebuje vse parametre za naključni vpliv

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix}$$

- Vpliv živali označimo tudi z $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & & & & & & \textit{merjene živali} & & & & & & & \textit{sorodniki} & \end{bmatrix}$$

- Pri vplivu živali dodamo tudi sorodnike iz porekla

- Lahko so tudi prisotni tudi drugi nivoji

- Nakažemo lahko posamezne skupine parametrov, npr. po naključnih vplivih

# Matrika dogodkov za naključne vplive

$$\begin{array}{cc} \mathbf{u}' \rightarrow & \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ \Uparrow \ \mathbf{y} & \Uparrow \ \mathbf{Z} \end{array}$$

- V katerem razredu (živali) se je dogodek (podatek) zgodil?

# Matrika dogodkov za naključne vplive

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{u}' \rightarrow & \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 640 \\ 650 \\ 650 \\ 680 \\ 620 \\ 600 \\ 590 \\ 660 \\ 650 \\ 700 \\ 710 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

- Zadnji trije sorodniki nimajo meritev

## ... dnevni prirast ...

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$$

kjer pomeni:

| | | red |
|---|---|---|
| $\mathbf{y}$ | - vektor opazovanj za dnevni prirast | $11 \times 1$ |
| $\beta$ | - vektor parametrov za sistematske vplive | $9 \times 1$ |
| $\mathbf{u}$ | - vektor parametrov za naključne vplive | $14 \times 1$ |
| $\mathbf{X}$ | - matrika dogodkov za sistematske vplive | $11 \times 9$ |
| $\mathbf{Z}$ | - matrika dogodkov za naključne vplive | $11 \times 14$ |
| $\mathbf{e}$ | - vektor ostankov; $\mathbf{e} = \{e_{ijkl}\}$ | $11 \times 1$ |

# Pomni!

| Model | Enačba | Opomba |
|---|---|---|
| Sistematski | $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}$ | vsi sistematski vplivi skupaj |
| | $\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \mathbf{e}$ | sistematske vplive ločimo |
| Mešani | $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$ | |
| | $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}_g\mathbf{g} + \mathbf{Z}_a\mathbf{a} + \mathbf{e}$ | naključne vplive ločimo |
| Naključni | $\mathbf{y} = \mathbf{1}\mu + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$ | ima srednjo vrednost |
| | $\mathbf{y} = \mu + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$ | |

$$\mathbf{1}' = \underset{\sim}{1}' = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\mu' = \underset{\sim}{\mu}' = \left[\begin{array}{cccccccc} \mu & \mu & \mu & \mu & \mu & \mu & \cdots & \mu \end{array}\right]$$

# Pomni!

$\mathbf{e} = \{e_{ijkl}\}$ $e_{ijkl}$ **element** stolpičnega vektorja $e$

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_j\}$ $\mathbf{x}_j$ j-ti stolpec matrike $\mathbf{X}$

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}'_i\}$ $\mathbf{x}'_i$ i-ta vrstica matrike $\mathbf{X}$

$\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ $x_{ij}$ **element** iz i-te vrstice in j-tega stolpca matrike $\mathbf{X}$

... dnevni prirast - prva lastnost...

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1$$

kjer pomeni:

| | | red |
|---|---|---|
| $\mathbf{y}_1$ | - vektor opazovanj za DP ($\mathbf{y_1} = \{y_{1ijkl}\}$) | $11 \times 1$ |
| $\boldsymbol{\beta}_1$ | - vektor parametrov za sistematske vplive | $9 \times 1$ |
| $\mathbf{u}_1$ | - vektor parametrov za naključne vplive | $14 \times 1$ |
| $\mathbf{X}_1$ | - matrika dogodkov za sistematske vplive | $11 \times 9$ |
| $\mathbf{Z}_1$ | - matrika dogodkov za naključne vplive | $11 \times 14$ |
| $\mathbf{e}_1$ | - vektor ostankov $\mathbf{e}_1 = \{e_{1ijkl}\}$ | $11 \times 1$ |

# Opazovanja - debelina hrbtne slanine

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ \vdots \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ \vdots \\ 22 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix}$$

ali

$$\mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 16 \\ 14 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 12 \\ 20 \\ 17 \\ \vdots \\ 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 16 \\ 14 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 12 \\ 20 \\ 17 \\ 24 \\ 24 \\ 27 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \\ 22 \\ 19 \\ 23 \\ 25 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}$$

# Opazovanja - debelina hrbtne slanine

- Vrstni red podatkov v vektorju opazovanj je lahko različen

- Poleg prikazanih vektorjev opazovanj so še drugi

- Prikazana vektorja opazovanj sta različna zaradi vrstnega reda elementov: $\mathbf{y}_2 \neq \mathbf{y}_B$

- Pri nastavljanju matrik dogodkov **ohranimo** na vrstni red, ki smo ga izbrali v vektorju opazovanj in vektorjih neznanih parametrov za sistematske in naključne vplive

- Za en primer velja le en vrstni red ...

# Vektor neznanih parametrov - DHS

## a) za sistematske vplive

$$y_{2ijklm} \quad = \mu_2 + P_{2i} + M_{2j} + F_{2k} + b_{2i}(x_{ijkl} - 100) + u_{2ijkl} + e_{2ijklm}$$

- model podoben, vendar so parametri različni

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2 \beta_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_2$$

- dodajmo oznako za lastnost

$\beta_2' = \underset{\sim}{\beta_2'} =$ **druga lastnost**

$$\begin{bmatrix} \mu_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & M_{21} & M_{22} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$ ali

$\beta' = \underset{\sim}{\beta_H'} =$ **debelina hrbtne slanine**

$$\begin{bmatrix} \mu_H & P_{H1} & P_{H2} & P_{H3} & M_{H1} & M_{H2} & F_{H1} & F_{H2} & F_{H3} & b_{H1} & b_{H2} & b_{H3} \end{bmatrix}$$

## ... DHS - prva ponovitev ...

$$\begin{bmatrix} \mu_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & M_{21} & M_{22} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Parametre smo označili z indeksom za drugo lastnost

# ... DHS - obe ponovitvi ...

- Vektor opazovanj $\mathbf{y}$ in matriko dogodkov $\mathbf{X}$ nadaljujemo na naslednjih dveh slikah zaradi dolžine
- Posamezni del razdeljenega vektorja - **delni vektor**
- Posamezni del razdeljene matrike - **delna matrika**
- Pri vplivih z razredi sta vrednosti 1 (da) in 0 (ne)
- Pri regresijskih koeficientih uporabimo (spremenjeno) neodvisno spremenljivko: $(x_{ijkl} - 100)$
- Ugotovili bomo, da sta delni matriki dogodkov za prve in druge ponovitve **izjemoma** enaki

## ... DHS - prva ponovitev ...

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} \mu_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & M_{21} & M_{22} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & +5 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\Uparrow \quad \mathbf{X}_{21}$$

... DHS - druga ponovitev ...

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} \mu_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & M_{21} & M_{22} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- pri drugi ponovitvi se vrstice ponavljajo, ker so te ponovitve bile izmerjene po istimi pogoji (pod istimi nivoji)

## ... DHS - druga ponovitev ...

$$
\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{cccccccccccc} \mu_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & M_{21} & M_{22} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{array}\right] &
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & +5 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\Uparrow \quad \mathbf{X}_{22} = \mathbf{X}_{21}$$

- sestavimo obe podmatriki

# Matrika dogodkov za sistematske vplive - DHS

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & & & 1 & & 1 & & & +2 & & \\
1 & 1 & & & 1 & & & 1 & & -2 & & \\
1 & 1 & & & & 1 & & & 1 & +5 & & \\
1 & 1 & & & & 1 & 1 & & & +2 & & \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 & & & -5 & \\
1 & & 1 & & & 1 & & & 1 & & +1 & \\
1 & & 1 & & & 1 & 1 & & & & +1 & \\
1 & & & 1 & 1 & & & 1 & & & & -3 \\
1 & & & 1 & 1 & & & & 1 & & & 0 \\
1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & & & -3 \\
1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & +2 \\
1 & 1 & & & 1 & & 1 & & & +2 & & \\
1 & 1 & & & 1 & & & 1 & & -2 & & \\
1 & 1 & & & & 1 & & & 1 & +5 & & \\
1 & 1 & & & & 1 & 1 & & & +2 & & \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 & & & -5 & \\
1 & & 1 & & & 1 & & & 1 & & +1 & \\
1 & & 1 & & & 1 & 1 & & & & +1 & \\
1 & & & 1 & 1 & & & 1 & & & & -3 \\
1 & & & 1 & 1 & & & & 1 & & & 0 \\
1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & & & -3 \\
1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & +2
\end{bmatrix}$$

Vrednosti 0 smo zaradi preglednosti izpustili. Obdržali smo jih samo pri regresiji.

# Vektor neznanih parametrov - DSS

## a) za sistematske vplive

$$y_{2ijklm} = \mu_2 + P_{2i} + M_{2j} + F_{2k} + b_{2i}(x_{ijkl} - 100) + u_{2ijkl} + e_{2ijklm}$$

- model podoben, vendar so parametri različni

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{X}_3\beta_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{u}_3 + \mathbf{e}_3$$

- dodajmo oznako za lastnost

$\beta'_3 = \underset{\sim}{\beta'_3} =$ **tretja lastnost**

$$\begin{bmatrix} \mu_3 & P_{31} & P_{32} & P_{33} & M_{31} & M_{32} & F_{31} & F_{32} & F_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$ ali

$\beta' = \underset{\sim}{\beta'_S} =$ **debelina stranske slanine**

$$\begin{bmatrix} \mu_S & P_{S1} & P_{S2} & P_{S3} & M_{S1} & M_{S2} & F_{S1} & F_{S2} & F_{S3} & b_{S1} & b_{S2} & b_{S3} \end{bmatrix}$$

# ... Debelina stranske slanine ...

$$
\begin{array}{c}
\\
\begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 15 \\ 13 \\ 22 \\ 27 \\ 29 \\ 25 \\ 24 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccccccccc} \mu_3 & P_{31} & P_{32} & P_{33} & M_{31} & M_{32} & F_{31} & F_{32} & F_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & +5 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\Uparrow \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_{21}$$

## Vektor neznanih parametrov

## b) za naključne vplive

$\mathbf{u}_2' =$

$$\begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} & u_{27} & u_{28} & u_{29} & u_{210} & u_{211} & u_{212} & u_{213} & u_{214} \end{bmatrix}$$

- vektor vsebuje vse parametre za naključne vplive (vpliv živali) za drugo lastnost
- vpliv živali označimo tudi z $\mathbf{a}$

$\mathbf{a}_2' =$

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{210} & a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \end{bmatrix}$$

- prvi indeks označuje drugo lastnost, drugi indeks pa živali po vrsti
- imamo samo dve ponovitvi, ki pa jih rabimo za eno plemensko vrednost na žival

# Matrika dogodkov za naključne vplive - prvi del

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} & u_{27} & u_{28} & u_{29} & u_{210} & u_{211} & u_{212} & u_{213} & u_{214} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

- zaradi pomanjkanja prostora je prikazana samo del matrike, ki se nanaša na prvo meritev

# Matrika dogodkov za naključne vplive - drugi del

$$\begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} & u_{27} & u_{28} & u_{29} & u_{210} & u_{211} & u_{212} & u_{213} & u_{214} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

- zaradi pomanjkanja prostora je prikazana samo del matrike, ki se nanaša na drugo meritev

# Matrika dogodkov za naključne vplive - skupaj

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 26 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \\ 17 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 19 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& 1 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & 1 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & 1 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & 1 & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & 1 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& 1 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & 1 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & 1 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & 1 & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & 1 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

# Matrika dogodkov za naključne vplive - skupaj

$$\mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 16 \\ 14 \\ 16 \\ 16 \\ 15 \\ 12 \\ 20 \\ 17 \\ 24 \\ 24 \\ 27 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \\ 22 \\ 19 \\ 23 \\ 25 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# ... Model: debelina hrbtne slanine ...

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_2$$

kjer pomeni:

| | | red |
|---|---|---|
| $\mathbf{y_2}$ | - vektor opazovanj za DHS | 22 |
| $\beta_2$ | - vektor parametrov za sistematske vplive | 12 |
| $\mathbf{u}_2$ | - vektor parametrov za naključne vplive | 14 |
| $\mathbf{X}_2$ | - matrike dogodkov za sistematske vplive | 22 x 12 |
| $\mathbf{Z}_2$ | - matrika dogodkov za naključne vplive | 22 x 14 |
| $\mathbf{e}_2$ | - vektor ostankov; $\mathbf{e_2} = \{e_{2ijklm}\}$ | 22 |

# Matrika dogodkov za naključne vplive - DSS

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{u}_3' \rightarrow & \left[\begin{array}{cccccccccccccc} u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & u_{36} & u_{37} & u_{38} & u_{39} & u_{3A} & u_{3B} & u_{3C} & u_{3D} & u_{3E} \end{array}\right] \\
\begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 15 \\ 13 \\ 22 \\ 27 \\ 29 \\ 25 \\ 24 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Zadnji trije sorodniki nimajo meritev

... Model: debelina stranske slanine ...

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{X}_3\beta_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{u}_3 + \mathbf{e}_3$$

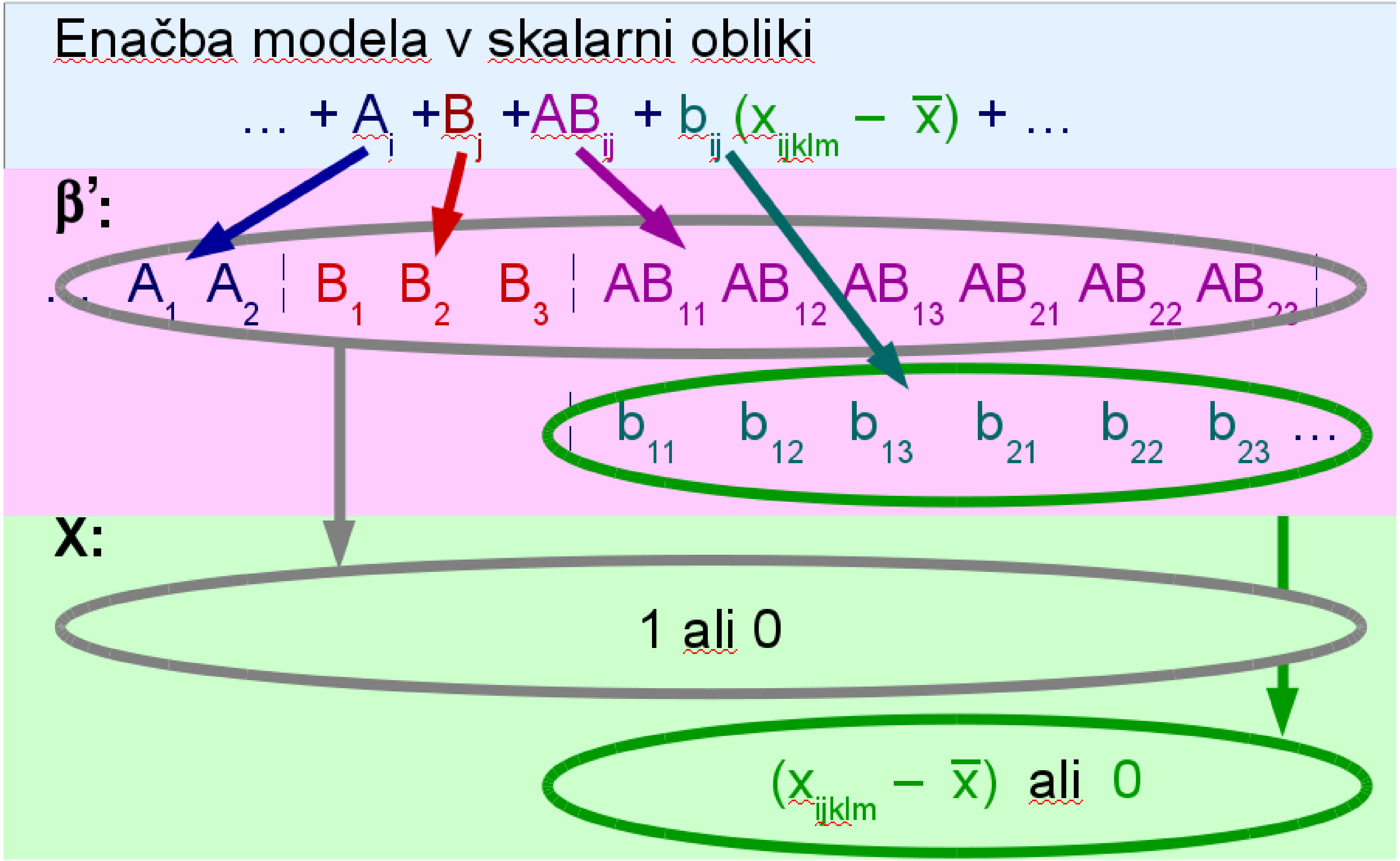
kjer pomeni:

| | | red |
|---|---|---|
| $\mathbf{y}_3$ | - vektor opazovanj za DHS | 11 |
| $\beta_3$ | - vektor parametrov za sistematske vplive | 12 |
| $\mathbf{u}_3$ | - vektor parametrov za naključne vplive | 14 |
| $\mathbf{X}_3$ | - matrike dogodkov za sistematske vplive | 11 x 12 |
| $\mathbf{Z}_3$ | - matrika dogodkov za naključne vplive | 11 x 14 |
| $\mathbf{e}_3$ | - vektor ostankov; $\mathbf{e}_3 = \{e_{3ijklm}\}$ | 11 |

# Nekaj primerov različnih regresij

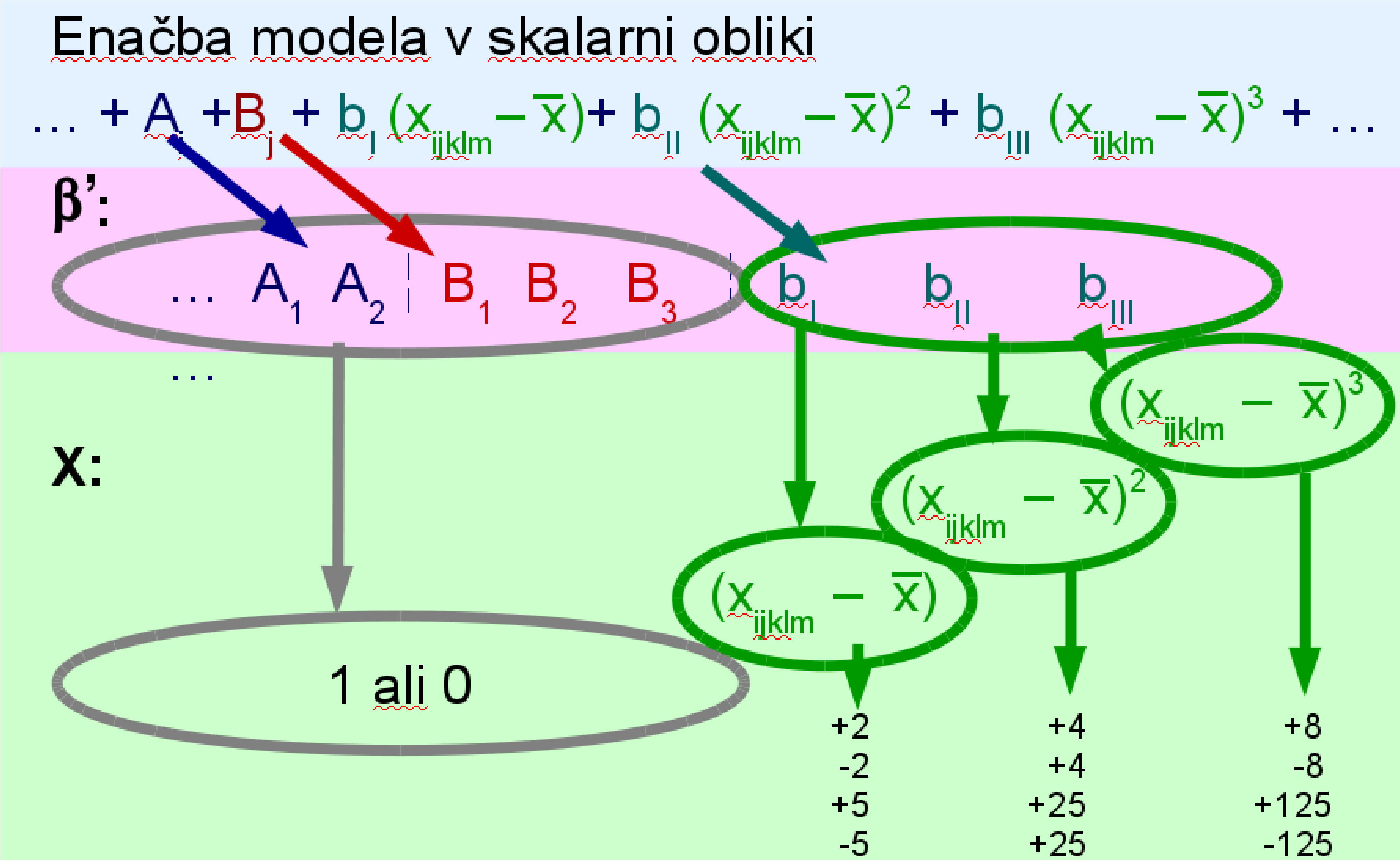
- pri slaninah smo uporabili ugnezdeno regresijo
- polinomi višje (npr. tretje) stopnje
- regresija z več (npr. dvema) neodvisnima (pojasnjevalnima) spremenljivkama
  - vpliv velikost gnezda in rojstne mase na lastnosti rasti, sestave telesa pri prašičih ...
  - mesnatost prašičev pojasnjujejo meritev S in M ter masa toplih klavnih polovic
  - na "odgovore" anketirancev vplivata starost in plača ...
- regresija s produktom dveh spremenljivk
- regresija s transformirano spremenljivko
  - koren, logaritem, spremenljivke v členih pri laktacijskih krivuljah

## … ugnezdena regresija …



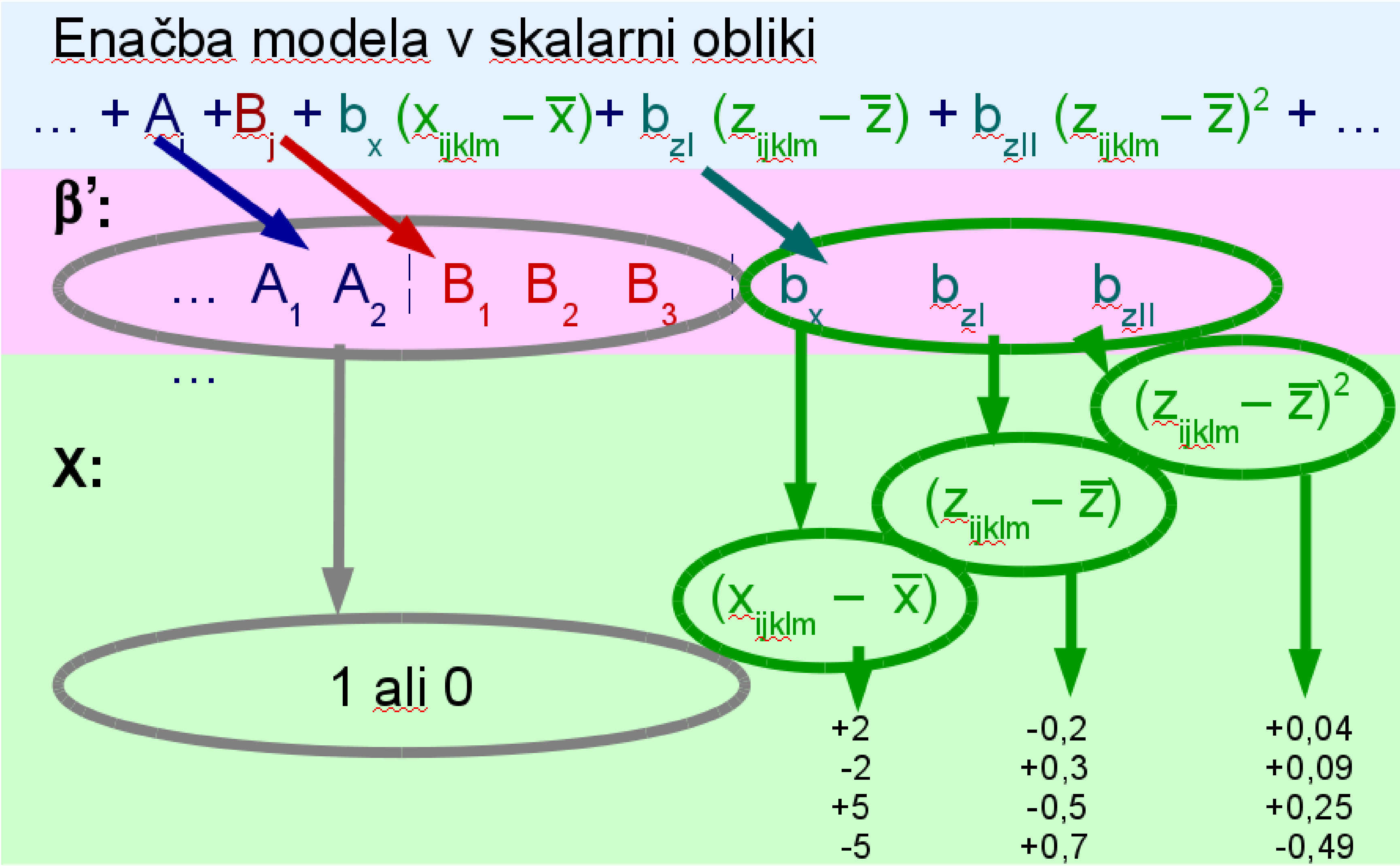

npr.: ugnezdeno regresijo smo delali pri DHS

## … polinom višje stopnje …



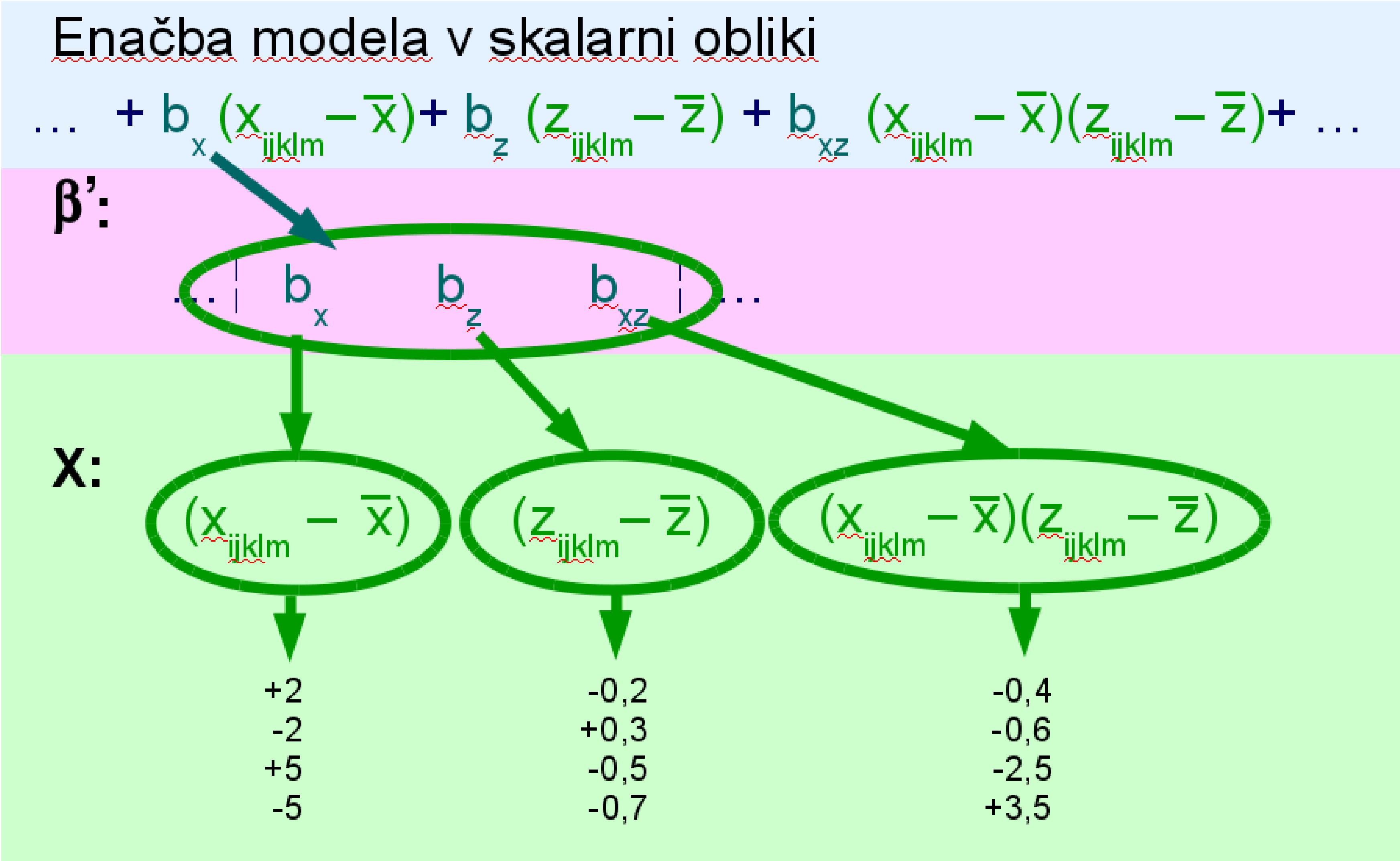

Primer: polinom tretje stopnje

## … regresija z dvema neodvisnima spremenljivkama …



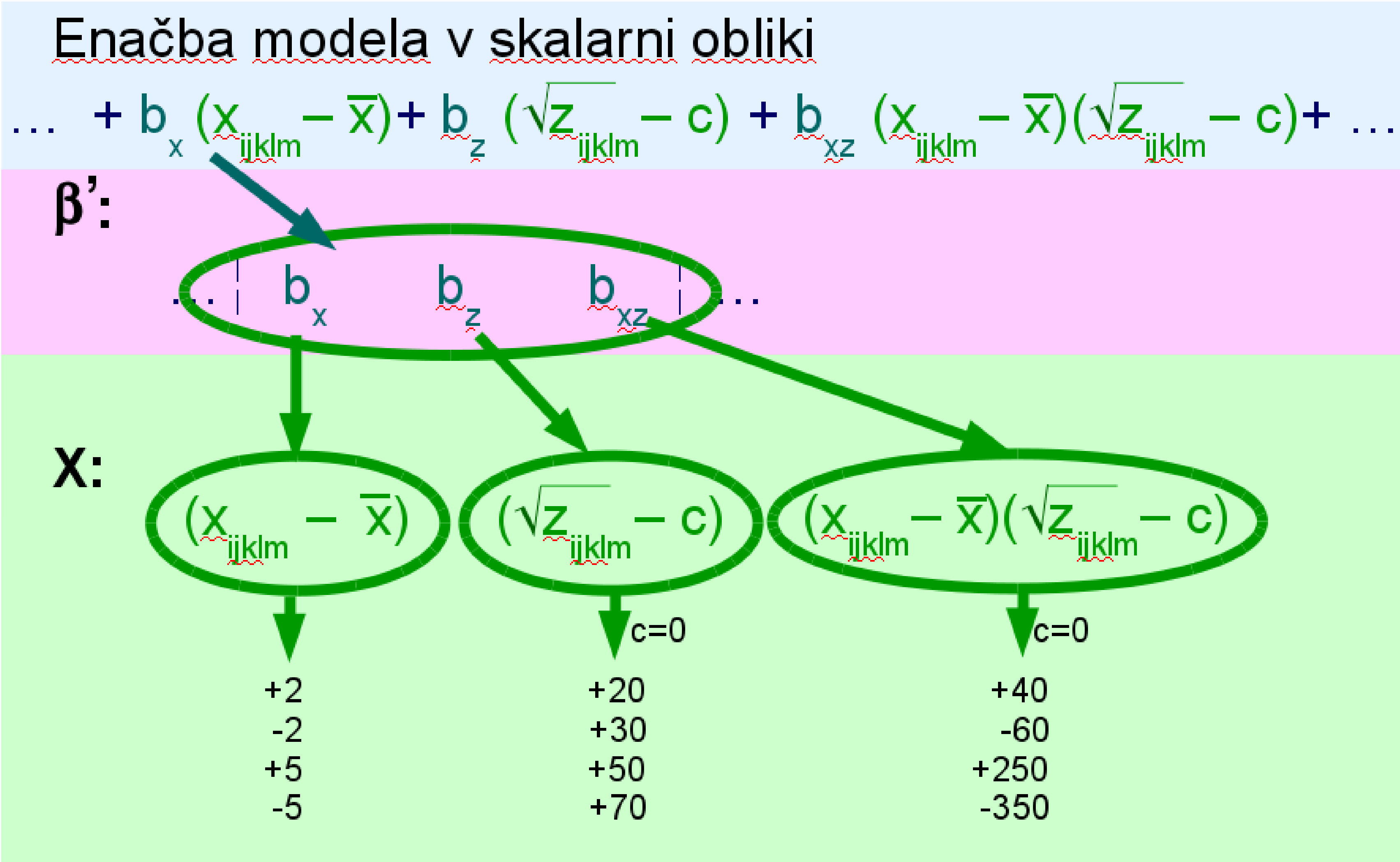

npr.: x - velikost gnezda (kom.), z - rojstna masa (kg)

## … regresija z dvema neodvisnima spremenljivkama II …




npr.: x - velikost gnezda (kom.), z - rojstna masa (kg)

## ... ko spremenljivko "z" transformiramo ...




npr.: x - velikost gnezda (kom.), z - druga spremenljivka

## Transformacije neodvisne spremenljivke v laktacijskih krivuljah

- Neodvisna (pojasnjevalna) spremenljivka je stadij laktacije

- Kaj vpišemo v matriko dogodkov, kadar so $x_i$ 30 dni, 60 dni, 90 dni, 120 dni ... pri naslednjih enačbah?

$$y_i = \cdots b_0 + b_1 \cdot \frac{x_i}{305} + b_2 \cdot \left(\frac{x_i}{305}\right)^2 + b_3 \cdot ln\left(\frac{305}{x_i}\right) + b_4 \cdot ln^2\left(\frac{305}{x_i}\right) \cdots$$

$$\beta' \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 0,0984 & 0,009675 & 2,3191 & 5,3783 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0,1967 & 0,038699 & 1,6260 & 2,6437 & \cdots \\ & & & & & & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & & & & & \\ \cdots & 1 & \frac{x_i}{305} & \left(\frac{x_i}{305}\right)^2 & \left(\frac{305}{x_i}\right) & ln^2\left(\frac{305}{x_i}\right) & \cdots \end{bmatrix}$$

# Wilminkova laktacijska krivulja

- $k = 0,05$ (Wilmink), $k = 0,065$ (Silvestre in sod. 2006)

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 exp\left(-kx_i\right)$$

$$\beta' \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 30 & 0,2231 & \cdots \\ \cdots & 1 & 60 & 0,0498 & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \cdots & 1 & x_i & exp\left(-kx_i\right) & \cdots \end{bmatrix}$$

## Guo-Swalvejeva laktacijska

- izbran $k = -0.055$

- izračunani elementi matrike $\mathbf{X}$ za 30. in 60. dan laktacije

$$y_i = b_0 + b_1 {}^{x_i}/_{305} + b_2 x_i^2 sin\left({}^{x_i}/_{100}\right) + b_3 x_i^3 sin\left({}^{x_i}/_{100}\right) + b_4 exp\left\{k x_i\right\} + \cdots$$

$$\beta' \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 0,0983 & 265,9682 & 7979,04 & 0,19205 & \cdots \\ \cdots & & 0,1967 & 2032,7129 & 121962,77 & 0,03688 & \cdots \\ & & & & & & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & & & & & \\ \cdots & 1 & {}^{x_i}/_{305} & x_i^2 sin\left({}^{x_i}/_{100}\right) & x_i^3 sin\left({}^{x_i}/_{100}\right) & exp\left\{k x_i\right\} & \cdots \end{bmatrix}$$